

THÈSE

présentée à

**L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE
FRANCHE-COMTÉ**

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ
Spécialité : Sciences pour l'Ingénieur

CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À LA SIMULATION NUMÉRIQUE DU DÉCOUPAGE DES MÉTAUX

par

Vincent **LEMIALE**

Soutenue le 28 juin 2004 devant la Commission d'Examen :

Rapporteurs	S.	AHZI	Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg I
	M.	BRUNET	Professeur à l'I.N.S.A. de Lyon
Examineurs	J.Cl.	GELIN	Professeur, directeur de l'ENSMM, Besançon
	R.	HAMBLI	HDR, Maître de Conférences à l'Université d'Angers
	G.	MONTEIL	Professeur à l'ENSMM, Besançon
	Ph.	PICART	Professeur à l'Université de Franche-Comté
Invités	Ph.	AUTESSERRE	Ingénieur de Recherche Arcelor Research SA, Maizières-les-Metz
	Cl.	IMBERT	Directeur Recherche et Qualité, Société AUGÉ Découpage, Besançon
	J.F.	MICHEL	Ingénieur de Recherche Université de Franche-Comté

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein de l'équipe Modélisation et Mise en Forme des Matériaux du Laboratoire de Mécanique Appliquée Raymond Chaleat.

Je tiens à remercier Monsieur Jean-Claude Gelin pour m'avoir accueilli dans son groupe de recherche, pour avoir mis ses connaissances à ma disposition et pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance.

Ce travail a été dirigé par Monsieur Philippe Picart. Je tiens tout d'abord à le remercier pour avoir su rester disponible malgré ses nombreuses responsabilités. Je le remercie également vivement pour sa loyauté, sa patience, son aide. Je souhaite enfin le remercier pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour m'avoir toujours laissé mon autonomie.

Mes sincères remerciements vont à Messieurs Michel Brunet et Said Ahzi pour m'avoir fait l'honneur de rapporter mes travaux. Leurs commentaires avisés permettent d'envisager des voies de recherche prometteuses.

Merci également à Messieurs Ridha Hambli et Guy Monteil pour avoir participé à mon jury en tant qu'examinateurs, et pour la pertinence de leurs remarques.

Je souhaite remercier Messieurs Claude Imbert, Philippe Autesserre et Jean-François Michel d'avoir accepté mon invitation à ma soutenance de thèse, me faisant ainsi profiter de leur vision industrielle de ces travaux.

Je remercie sincèrement la société AUGÉ Découpage pour le support apporté dans la bonne réalisation de ces travaux.

Je souhaite remercier l'ensemble des personnes qui sont intervenues de près ou de loin dans la réalisation de ces travaux. Qu'ils soient tous chaleureusement remerciés de m'avoir apporté les nombreuses compétences qui me faisaient défaut. La place me manque pour leur témoigner séparément toute ma gratitude, qu'ils soient assurés que ces remerciements n'en sont pas moins sincères. Merci donc (par ordre alphabétique) à : Jean-Pierre Bigle, Lamine Boubakar, Jérôme Chambert, André Devillers, Camille Garcin, Frédéric Gouverd, Fabien Gréban, Carl Labergère, Hugo Leclerc, Henrik Lenoir, Sébastien Meunier, Jean-François Michel, Pascal Paquier, Nicolas Pernin, Mounir Qasmi, Pascal Robinet, Sébastien Thibaud, Benoit Vieille. En espérant n'avoir oublié personne...

Je remercie ma famille et mes amis pour avoir réussi à patienter tout au long de cette 'dernière ligne droite' qui s'est 'un peu' éternisée.

Je remercie tout particulièrement Cécile-Ham-Sun pour son soutien et la patience dont elle a fait preuve, qui pourtant a été mise à rude épreuve. Sans elle, l'issue de ma thèse aurait été toute autre, je ne la remercierai jamais assez d'être à mes côtés. Je n'oublierai pas enfin de remercier Marine pour avoir, du haut de ses sept ans, supporté 'Vincent qui travaille sur sa thèse', et pour m'avoir donné sans le savoir une belle leçon de vie.

Table des matières

Principales Notations	ix
Introduction Générale	1
1 Présentation du découpage de précision de métaux fins	3
Introduction	3
1.1 Présentation du découpage mécanique	3
1.2 Principe du découpage	5
1.3 Le découpage progressif	7
1.4 Aspect des pièces découpées	10
Enjeux des travaux engagés	10
2 Etat de l’art en découpage des métaux	13
Introduction	13
2.1 Historique des recherches en découpage	14
2.2 Connaissances issues de l’expérience	15
2.2.1 Introduction	15
2.2.2 Caractérisation d’un découpage	15
2.2.3 Comportement mécanique du matériau découpé	17
2.2.4 Principaux résultats expérimentaux	20
2.2.5 Bilan	23
2.3 Modèles théoriques en découpage	23
2.3.1 Introduction	23
2.3.2 Présentation des principaux modèles	23
2.3.3 Bilan	28
2.4 Simulation numérique du découpage	30
2.4.1 Introduction	30
2.4.2 Plates-formes de calcul	30
2.4.3 Problèmes traités par la simulation numérique	31
2.4.4 Méthodes numériques de résolution	31
2.4.5 Comportement matériel	33
2.4.6 Simulation de la propagation des fissures	37
2.4.7 Bilan	38
Conclusion	39

3	Contribution à la modélisation mécanique du découpage	43
	Introduction	44
3.1	Description d'un solide déformable	44
3.1.1	Description géométrique	44
3.1.2	Mesures des déformations	45
3.1.3	Mesure des taux de déformation	47
3.1.4	Configuration intermédiaire relâchée	47
3.1.5	Additivité des taux de déformation	48
3.1.6	Tenseurs des contraintes	48
3.2	Equilibre d'un milieu continu	49
3.3	Description du contact et du frottement entre deux solides	51
3.3.1	Contact	51
3.3.2	Frottement	52
3.4	Comportements matériels non endommageants	53
3.4.1	Mécanismes physiques de la déformation pour les métaux cristallins	53
3.4.2	Élasto-plasticité avec écrouissage	54
3.4.3	Élasto-viscoplasticité	59
3.5	Modèles d'endommagement	62
3.5.1	Mécanismes physiques d'endommagement	63
3.5.2	Modèle d'endommagement de type Lemaître	64
3.5.3	Modèle d'endommagement de type Gurson	68
3.6	Comportement matériel en transformations finies	73
3.6.1	Principe d'objectivité	74
3.6.2	Formulation des lois de comportement	75
3.7	Détection de l'amorçage d'une fissure macroscopique	77
3.7.1	Introduction	77
3.7.2	Prédiction de l'amorçage d'une fissure par une zone complètement endommagée	77
3.7.3	Les modèles non couplés	77
3.8	Propagation d'une fissure	81
3.8.1	Problématique	81
3.8.2	Stratégie retenue	82
	Conclusion	82
4	Contribution à la simulation numérique du découpage	85
	Introduction	86
4.1	Discretisation spatiale	86
4.1.1	Principe des puissances virtuelles	86
4.1.2	Passage du problème continu au problème discret	87
4.2	Remaillage	90
4.2.1	Introduction	90
4.2.2	Choix du mailleur	90
4.2.3	Critères d'activation du remaillage	91
4.2.4	Définition des paramètres de remaillage	91
4.2.5	Transfert des conditions aux limites	93
4.2.6	Transport des champs nodaux	94
4.2.7	Transport des champs aux points de Gauss	95

4.2.8	Rééquilibrage de la structure	97
4.2.9	Bilan	97
4.3	Intégration temporelle	100
4.3.1	Introduction	100
4.3.2	Méthode implicite	100
4.3.3	Méthode explicite	105
4.3.4	Bilan	106
4.4	Gestion du contact unilatéral avec frottement	107
4.4.1	Traitement du contact	107
4.4.2	Traitement du frottement	110
4.4.3	Bilan	111
4.5	Intégration numérique des lois de comportement	111
4.5.1	Énoncé du problème	111
4.5.2	Configuration intermédiaire d'intégration	112
4.5.3	Schéma d'intégration du tenseur des contraintes	113
4.5.4	Comportement élasto-plastique	114
4.5.5	Comportement élasto-viscoplastique	117
4.5.6	Modèle d'endommagement de type Lemaître	121
4.5.7	Modèle d'endommagement de type Gurson	124
4.5.8	Bilan	127
4.6	Analyse de la fissuration	128
4.6.1	Introduction	128
4.6.2	Première approche : non prise en compte de la propagation	128
4.6.3	Deuxième approche : Méthode d'élimination des éléments	129
4.6.4	Troisième approche : analyse de la propagation d'une fissure	131
4.6.5	Bilan	134
	Conclusion	134
5	Exemples numériques de validation	137
	Introduction	137
5.1	Traction d'un élément Q4 axisymétrique	138
5.1.1	Description du test	138
5.1.2	Comportements élasto-plastique et élasto-viscoplastique	138
5.1.3	Modèle de type Lemaître	143
5.1.4	Modèle de type Gurson	146
5.2	Essai de cisaillement simple	147
5.2.1	Description du test	147
5.2.2	Solution analytique	147
5.2.3	Résultats	149
5.3	Traction uniaxiale d'une éprouvette	150
5.3.1	Description du test	150
5.3.2	Résultats	152
5.4	Traction d'une plaque non symétrique	154
5.4.1	Description du test	154
5.4.2	Prédiction de l'amorçage d'une fissure	156
5.4.3	Méthode d'élimination des éléments	157
5.4.4	Méthode de propagation de fissures	158

5.4.5	Bilan	160
5.5	Test de compression : collar test	161
5.5.1	Description du test	161
5.5.2	Analyse qualitative de l'algorithme de remaillage	162
5.5.3	Comparaison avec les données expérimentales	164
5.6	Essai de forgeage à chaud	165
5.6.1	Description du test	165
5.6.2	Résultats	167
5.7	Découpage axisymétrique	170
5.7.1	Description du test	170
5.7.2	Résultats	172
5.7.3	Bilan	182
	Conclusion	183
6	Réalisation d'outils numériques et expérimentaux d'aide à la caractérisation du comportement des métaux en découpage	185
6.1	Présentation du logiciel BLANKFORM	186
6.1.1	Introduction	186
6.1.2	Pré-processeur	186
6.1.3	Solveur	189
6.1.4	Post-processeur	189
6.2	Présentation du dispositif expérimental	190
6.2.1	Principales caractéristiques de l'outillage	190
6.2.2	Instrumentation	192
6.2.3	Bilan	194
6.3	Mise en œuvre des outils numériques et expérimentaux pour l'identification d'un critère de rupture	194
6.3.1	Introduction	194
6.3.2	Méthodologie d'identification d'un critère de rupture	195
6.3.3	Résultats expérimentaux	195
6.3.4	Identification numérique de la phase de rupture	197
6.4	Quelques applications de la simulation numérique pour l'aide au réglage des paramètres technologiques.	199
6.4.1	Introduction	199
6.4.2	Influence du jeu poinçon-matrice	199
6.4.3	Influence de la vitesse de coupe	202
	Conclusion	203
	Conclusion générale et perspectives	205
	Bibliographie	209
	Annexes	219
A	Principales caractéristiques de l'élément triangulaire à six nœuds	219

B	Calcul des gradients de déformation et des taux de déformation	223
B.1	Calcul de F_n^{n+1}	223
B.2	Calcul de $F_{n+\alpha}^{n+1}$	224
B.3	Calcul du jacobien J_{n+1}	224
B.4	Calcul du taux de déformation	225
B.5	Calcul de $F_n^{n+\alpha}$	225
C	Calcul de l'opérateur tangent pour le comportement élasto-plastique	227
D	Calculs utiles pour l'intégration numérique du modèle de Gurson	231
D.1	Dérivées partielles de Φ	231
D.2	Expression des coefficients a_{ij}	232
D.3	Coefficients intervenant dans l'opérateur tangent cohérent	233
E	Formulation semi-analytique du modèle de Gurson	235
E.1	Objectif	235
E.2	Mise en équations	235
E.3	Résolution	236
F	Présentation du dispositif d'enregistrement vidéo du découpage dans l'épaisseur de la tôle	237
F.1	Introduction	237
F.2	Description du dispositif	237
F.3	Exemple d'acquisition	238
F.4	Conclusion	241

Principales Notations

Symboles

$\underline{\underline{1}}$: Tenseur identité du 2^{nd} ordre
$\underline{\underline{I}}$: Tenseur identité du $4^{ème}$ ordre
$\underline{\underline{A}}$: Tenseur du 2^{nd} ordre
$\underline{\underline{A}}$: Tenseur du $4^{ème}$ ordre
\otimes	: Produit tensoriel
$:$: Produit tensoriel doublement contracté
div	: Divergence
$grad$: Gradient
tr	: Trace
det	: Déterminant

Energies et Potentiels

ψ	: Energie libre spécifique
s	: Entropie
ψ^e	: Potentiel thermodynamique élastique
ψ^p	: Potentiel thermodynamique plastique
ψ^{vp}	: Potentiel thermodynamique viscoplastique
ϕ	: Potentiel de dissipation
F	: Potentiel dual de ϕ
F_{vp}	: Potentiel de dissipation viscoplastique
F_r	: Potentiel de restauration
F_D	: Potentiel d'endommagement

Contraintes et vitesses de contraintes

$\underline{\underline{\sigma}}$: Tenseur des contraintes de Cauchy
$\underline{\underline{s}}$: Déviateur du tenseur de Cauchy
$\underline{\underline{T}}$: Tenseur de Boussinesq
$\underline{\underline{S}}$: Second tenseur de Piola-Kirchhoff
$\underline{\underline{\tau}}$: Tenseur de Kirchhoff
$\underline{\underline{\sigma}}^c$: Dérivée convective contravariante (ou dérivée de Lie) du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$
σ_{eq}	: Contrainte équivalente au sens de von Mises définie par $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}$
σ_m	: Contrainte hydrostatique définie par $\sigma_m = \frac{tr \underline{\underline{\sigma}}}{3}$

Grandeurs cinématiques

t	: Temps
Δt	: Pas de temps défini entre deux instants t_n et t_{n+1}
\vec{u}	: Vecteur déplacement d'un point M du solide
\vec{v}	: Vecteur vitesse d'un point M du solide
\vec{a}	: Vecteur accélération d'un point M du solide
$\vec{\delta v}$: Vecteur vitesse virtuelle d'un point M du solide

Déformations et vitesses de déformations

\underline{D}	: Tenseur des taux de déformation
\underline{W}	: Tenseur des taux de rotation
\underline{L}	: Tenseur des vitesses de déformation
\underline{F}	: Tenseur gradient de déformation
J	: Déterminant de \underline{F}

Caractéristiques mécaniques et thermiques d'un matériau

ρ	: Masse volumique
E	: Module d'Young
ν	: Coefficient de Poisson
G	: Module de cisaillement
K	: Module de compressibilité
C_v	: Chaleur spécifique à volume constant
σ_y	: Limite d'élasticité initiale
R	: Contrainte d'écoulement
σ_0	: Contrainte limite d'écoulement définissant la taille du domaine d'élasticité
$\hat{\sigma}_0$: Contrainte limite apparente
m	: Coefficient de sensibilité à la vitesse
n	: Coefficient d'écrouissage
p	: Coefficient de sensibilité à la température
ξ	: Coefficient de partage entre la dissipation mécanique et la dissipation thermique

Elasto-plasticité ou élasto-viscoplasticité

X^p	: Partie plastique de la grandeur X
X^{vp}	: Partie viscoplastique de la grandeur X
f	: Fonction décrivant le critère de plasticité
\tilde{f}_{vp}	: Fonction de charge dynamique
$\dot{\bar{\varepsilon}}^p$: Vitesse de déformation plastique équivalente définie par $(\frac{2}{3}\underline{D}^p : \underline{D}^p)^{\frac{1}{2}}$
$\bar{\varepsilon}^p$: Déformation plastique équivalente définie par $\int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}^p dt$
$\dot{\lambda}$: Multiplicateur instantané de plasticité
T	: Température

Modèles d'endommagement

Modèle de type Gurson

f	: Fraction volumique de cavités (porosité)
Φ	: Fonction de charge
σ_M	: Contrainte d'écoulement de la matrice
$\bar{\varepsilon}_M^p$: Déformation plastique équivalente de la matrice
$\dot{\bar{\varepsilon}}_M^p$: Vitesse de déformation plastique équivalente de la matrice
\dot{f}_{nu}	: Vitesse de variation de la fraction volumique due à la nucléation de nouvelles cavités
\dot{f}_{cr}	: Vitesse de variation de la fraction volumique due à la croissance de cavités existantes
q_1, q_2, q_3	: Paramètres matériels
\mathcal{A}, \mathcal{B}	: Coefficients de nucléation des cavités
f_n	: Fraction de cavités nucléées au niveau des inclusions
s_n	: Ecart type de la distribution initiale des inclusions
ε_n	: Déformation moyenne de nucléation
σ_n	: Contrainte moyenne de nucléation
f^*	: Fraction volumique efficace de cavités (fonction de f)
f_F	: Fraction volumique de cavités en fin de coalescence
f_U^*	: Valeur ultime de f^* correspondant à la rupture finale
f_C	: Porosité critique initiant la coalescence

Modèle de type Lemaître

D	: Variable d'endommagement
D_C	: Endommagement critique à rupture
Y	: Taux de restitution d'énergie élastique
$\tilde{\sigma}$: Contrainte effective
s_0, S_0	: Paramètres matériels

Traitement de la rupture

D_C	: Valeur critique pour un critère de rupture
L	: Longueur d'accroissement de fissure
\vec{v}	: Vecteur unitaire indiquant la direction de propagation d'une fissure
t_m	: Taille de maille en pointe de fissure

Notations intervenant dans les étapes de calcul

X_n	:	Valeur de la grandeur X à l'incrément n, correspondant au temps t_n
X_n^{n+1}	:	Grandeur relative entre les instants t_n et t_{n+1}
$X_{n+\alpha}$:	Grandeur relative à la configuration intermédiaire d'intégration

Eléments finis

N	:	Matrice d'interpolation des fonctions de forme
B	:	Matrice gradient des fonctions de forme
C	:	Matrice traduisant le comportement du matériau (opérateur tangent cohérent)
X^e	:	Grandeur élémentaire (définie sur chaque élément fini)
K	:	Matrice de rigidité globale
F_{int}	:	Vecteur nodal global des efforts intérieurs
F_{ext}	:	Vecteur nodal global des efforts extérieurs
$R(u)$:	Résidu des efforts nodaux
M	:	Matrice masse globale
u, v, a	:	Vecteurs déplacement, vitesse et accélération nodaux globaux

Introduction Générale

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la modélisation mécanique et la simulation numérique du découpage mécanique des métaux.

Ce procédé de mise en forme est couramment utilisé dans l'industrie. Il intervient notamment pour une large part dans la fabrication des composants dédiés à l'industrie électronique. Or, la concurrence accrue, à laquelle il faut ajouter la miniaturisation constante des produits dans ce secteur d'activités, conduisent les entreprises à rechercher une meilleure maîtrise technologique, tout en réduisant leurs coûts de production. Aujourd'hui encore, le réglage de l'ensemble des paramètres intervenant dans un découpage repose essentiellement sur un savoir faire propre à l'entreprise. Ce type d'approche nécessite une phase de mise au point plus ou moins longue pour un nouveau découpage à réaliser, selon la complexité de celui-ci. Il existe donc un besoin pour les entreprises spécialisées dans le découpage de se doter d'outils scientifiques d'aide à la conception.

Dans ce contexte, la société AUGÉ Découpage a mis en place depuis 1999 un projet de recherche devant conduire à une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu et par suite à une amélioration notable de la maîtrise du procédé. Concrètement, ce projet s'est traduit par la mise en place, avec le soutien de l'équipe Mise en Forme des Matériaux du Laboratoire de Mécanique Appliquée Raymond Chaléat (LMARC), d'un service de recherche au sein de cette entreprise. Un partenariat a également été entrepris avec les sociétés GRISET, fournisseur de matière et BRUDERER, fournisseur de presse. Quatre thèses ont été engagées dans les cinq dernières années : deux chez AUGÉ Découpage et deux au LMARC.

Le rôle du LMARC dans cette collaboration est d'apporter ses compétences dans le domaine de la modélisation et de la simulation numérique en mise en forme des métaux. L'objectif global de cette contribution est de participer à la caractérisation du comportement de la matière en découpage, à partir de laquelle il est possible de développer une modélisation mécanique du comportement. Ces modèles sont ensuite intégrés dans des outils de simulation numérique dédiés à une utilisation industrielle.

C'est dans cette problématique que se situe le thème des travaux présentés dans ce mémoire. Il s'agit principalement de développer un logiciel de simulation numérique du découpage basé sur une modélisation mécanique complète de ce procédé. En parallèle, un dispositif expérimental doit être mis en place afin de caractériser le comportement des métaux en découpage, et de disposer de données expérimentales indispensables à la modélisation mécanique.

Le premier chapitre présente les principes généraux du procédé de découpage de tôles. La terminologie employée tout au long de ce mémoire est également détaillée. Puis nous nous intéressons au découpage progressif tel qu'il est couramment pratiqué dans les entreprises travaillant pour l'industrie électronique. La caractérisation d'un découpage par

la courbe effort-déplacement du poinçon, et par l'analyse du profil dans l'épaisseur d'une pièce découpée, est brièvement exposée. A l'issue de cette présentation, les enjeux de nos travaux sont détaillés.

Le second chapitre propose une analyse bibliographique générale du découpage. Celle-ci concerne à la fois les travaux expérimentaux, théoriques et numériques. Elle sert de guide au présent travail, en mettant en évidence les connaissances acquises sur le découpage, mais également les points importants pour lesquels peu ou pas d'études ont été entreprises.

Dans le troisième chapitre est exposée la modélisation mécanique retenue dans le cadre de nos travaux. Elle comprend d'une part la résolution des équations d'équilibre avec prise en compte des conditions de contact unilatéral avec frottement. Elle concerne d'autre part la modélisation du comportement mécanique du matériau dans les différentes phases de déformation de la tôle en découpage. La prise en compte de la sensibilité du comportement à la vitesse de déformation et à la température est réalisée à l'aide d'un modèle de comportement élasto-viscoplastique avec effets thermiques, dans un cadre adiabatique. Ce type de modélisation est nécessaire pour la simulation d'un découpage effectué à des cadences de coupe élevées. Deux approches sont proposées pour traiter de l'endommagement progressif de la tôle. La première est une approche dite couplée, dans laquelle l'endommagement affecte les propriétés mécaniques du matériau. La seconde est une approche découplée, nécessitant d'introduire une fonction critère caractérisant l'endommagement dans le matériau.

Le quatrième chapitre présente les développements numériques réalisés à partir de la modélisation du chapitre 3. Ils s'appuient sur un code de calcul initial développé dans l'équipe Mise en Forme des Matériaux du LMARC et basé sur la méthode des éléments finis. Dans un premier temps, des algorithmes ont été mis en œuvre afin d'améliorer la robustesse du programme de calcul. Il s'agit tout d'abord d'un algorithme de remaillage, permettant d'éviter une trop grande distortion du maillage éléments finis. Puis, les algorithmes d'intégration temporelle utilisés sont présentés. Dans un second temps, l'intégration des modèles de comportement du matériau est réalisée. Enfin, les méthodes numériques de traitement de la rupture développées sont détaillées.

Le cinquième chapitre expose les tests de validation des développements numériques effectués. Par ailleurs, un calcul de validation sur un exemple de découpage axisymétrique est présenté. Les stratégies retenues pour l'étude de l'endommagement et de la rupture sont discutées.

Enfin, le sixième chapitre présente les outils numériques expérimentaux réalisés au cours de nos travaux. Le solveur présenté dans les chapitres précédents a été couplé à une interface graphique permettant de proposer un logiciel spécifiquement dédié au découpage de tôles. Le dispositif expérimental conçu et réalisé est ensuite présenté. Il permet l'enregistrement de la courbe effort-déplacement du poinçon, ainsi que l'enregistrement du découpage dans l'épaisseur de la tôle par l'intermédiaire d'une caméra CCD. Une méthodologie d'identification d'un critère de rupture couplant expérience et simulation numérique est présentée en illustration. Enfin, des exemples de simulation numérique sont proposés, démontrant l'intérêt de ce type d'approche pour analyser l'influence des paramètres technologiques du procédé.

Chapitre 1

Présentation du découpage de précision de métaux fins

Sommaire

Introduction	3
1.1 Présentation du découpage mécanique	3
1.2 Principe du découpage	5
1.3 Le découpage progressif	7
1.4 Aspect des pièces découpées	10
Enjeux des travaux engagés	10

Introduction

Dans ce premier chapitre, le procédé de découpage est présenté dans sa globalité. Les termes qui apparaîtront tout au long de ce mémoire y sont également introduits. Les enjeux des travaux effectués sont discutés, en parallèle avec les besoins industriels rencontrés au sein de la société AUGÉ Découpage, partenaire de l'étude. Certains documents proposés dans ce chapitre sont issus de la thèse de Meunier (2004).

1.1 Présentation du découpage mécanique

Une opération de découpage met généralement en jeu quatre éléments principaux :

- Un poinçon (ou perceur),
- Une matrice,
- Un serre flan (ou élément dévêtitseur),
- Une tôle¹ à découper.

¹Celle-ci se présentant dans notre cas sous la forme de bandes en différentes longueurs, le terme 'bande de matière' sera également employé. On trouve dans la littérature d'autres appellations, comme le flan ou encore l'échantillon de matière.

Les parties travaillantes (ou découpantes) sont le poinçon et la matrice. Tout au long de ce mémoire, nous désignerons par le terme 'outils' un couple poinçon/matrice. Sinon, les pièces seront nommées explicitement.

L'objectif d'une opération de découpage est de séparer en deux parties la tôle initiale. Suivant les applications, c'est la tôle percée (composants électroniques, par exemple) ou bien la partie enlevée de la tôle (roue dentée, par exemple) qui constituera la pièce finale.

Il existe différents procédés de découpage mécanique. Nous présentons ici les principaux. Cette description est motivée par le fait que la définition des termes utilisés dans la littérature n'est pas toujours clairement établie, et peut varier suivant les auteurs.

L'article des techniques de l'ingénieur (Chabenat et Martin, 1978) reprend la terminologie française. Certains des termes anglais peuvent être trouvés dans Wick (1984). Parmi les opérations courantes, on peut citer principalement, Fig. 1.1 :

- *Le découpage* : Opération qui consiste à prélever une pièce de contour quelconque dans une tôle. La pièce est donc la partie enlevée de la tôle. Il faut noter que c'est aussi le terme générique de toutes ces opérations (terme anglais : blanking).
- *Le poinçonnage* : Même définition que le découpage, mais la pièce est cette fois la tôle ajourée. Terme souvent employé pour des empreintes circulaires (terme anglais : punching).
- *La coupe à longueur* : Le découpage a lieu sur toute la largeur de la bande (terme anglais : cropping).
- *Le détournage* : C'est plutôt une opération de finition après une autre opération de mise en forme comme un emboutissage. Elle consiste à enlever l'excédent de matière sur le contour de la pièce (terme anglais : trimming).
- *Le cisailage* : Le découpage est effectué par deux lames dont l'une ou les deux sont mobiles (terme anglais : shearing). C'est donc un procédé différent du découpage mécanique traditionnel. Il est inclu ici car le terme 'shearing' est parfois employé pour désigner le découpage.

On peut noter que certains auteurs utilisent en anglais le terme 'cutting' pour le découpage. Ce terme est normalement plutôt réservé à la coupe orthogonale des métaux.

Le comportement du matériau est très similaire pour l'ensemble de ces procédés. C'est ce qui explique pourquoi la distinction n'est pas toujours faite.

Citons enfin le procédé de découpage fin (en anglais, fine blanking), permettant non pas de découper des pièces de faibles dimensions, mais d'obtenir une grande précision sur les pièces découpées. Bien que son principe soit le même que celui du découpage traditionnel, la technologie de l'outillage est quelque peu différente. Les références Chabenat et Martin (1978), Lee *et al.* (1995), Kondo et Suzuki (1996), Schuler (1998) donnent de plus amples informations sur le découpage fin. Le découpage traditionnel et le découpage fin y sont en particulier comparés.

Notre étude porte davantage, d'après les définitions précédentes, sur du poinçonnage. Toutefois, nous utiliserons dans la suite de ce mémoire le terme 'découpage', en tant que terme générique, pour désigner le procédé sur lequel nous travaillons².

²Conservant ainsi la terminologie employée dans l'industrie du découpage.

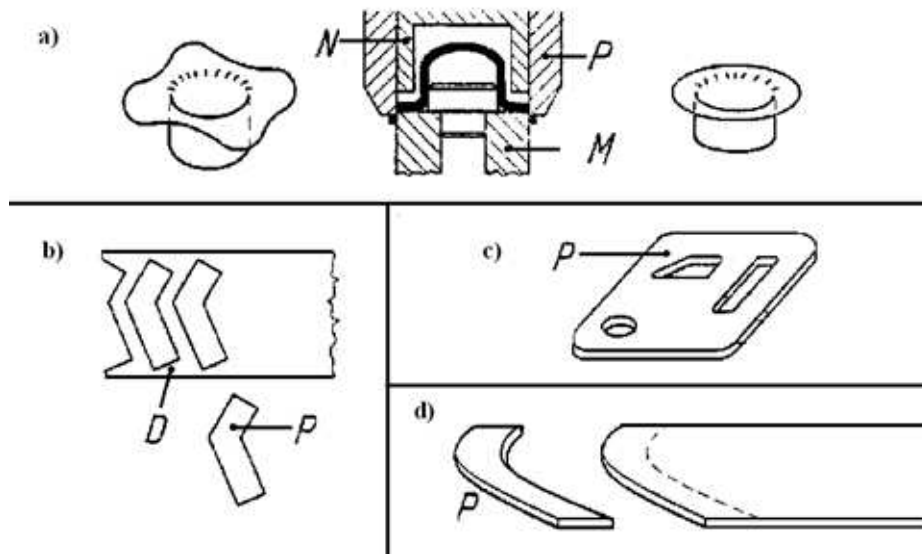


FIG. 1.1 – Exemples de pièces découpées pour différents procédés. a) : détournage (P : poinçon, M : matrice, N : contre poinçon); b) : découpage (D : déchet, P : pièce); c) : poinçonnage (P : pièce); d) : coupe à longueur (P : pièce) (d'après Chabenat et Martin (1978)).

1.2 Principe du découpage

Bien qu'il mette en jeu des phénomènes complexes, le découpage dans son principe est relativement simple, cf. Fig. 1.2.

La matrice est percée d'un ajour dont la forme est complémentaire de celle en bout de poinçon. Pendant le découpage, la tôle est maintenue en position sur la matrice ajourée par l'intermédiaire du serre flan. La descente du poinçon, guidé par le serre flan, entraîne la pénétration du poinçon dans la tôle et le découpage de cette dernière selon le profil ajouré. L'élément de la tôle qui se détache de la bande est appelé le copeau³. La poursuite de la descente du poinçon au-delà de l'épaisseur de la tôle permet alors d'éjecter le copeau de la matrice. La matrice présente fréquemment un angle de dépouille facilitant cette éjection. Enfin, le poinçon remonte, le serre flan jouant dans cette phase le rôle de dévêtitseur.

Nous appellerons 'poste de découpage' l'ensemble des éléments poinçon, matrice et serre flan.

Les principales caractéristiques géométriques d'un poste de découpage sont, Fig. 1.2 :

- Le jeu poinçon matrice J_{pm} . Pour un poinçon de forme quelconque, celui-ci est défini comme étant la valeur du décalage entre le profil de la forme en bout de poinçon et le profil de l'ajour de la matrice, Fig. 1.3.

Nous nous intéresserons essentiellement au découpage de formes simples rectangulaires ou circulaires. Dans ce cas, on peut définir le jeu poinçon-matrice par :

$$J_{pm} = \frac{L_m - L_p}{2} \quad (1.1)$$

³Suivant la dénomination utilisée dans l'industrie du découpage. Il est néanmoins parfois indiqué dans la littérature que le découpage est un procédé de mise en forme sans copeau, par opposition avec la coupe orthogonale des métaux.

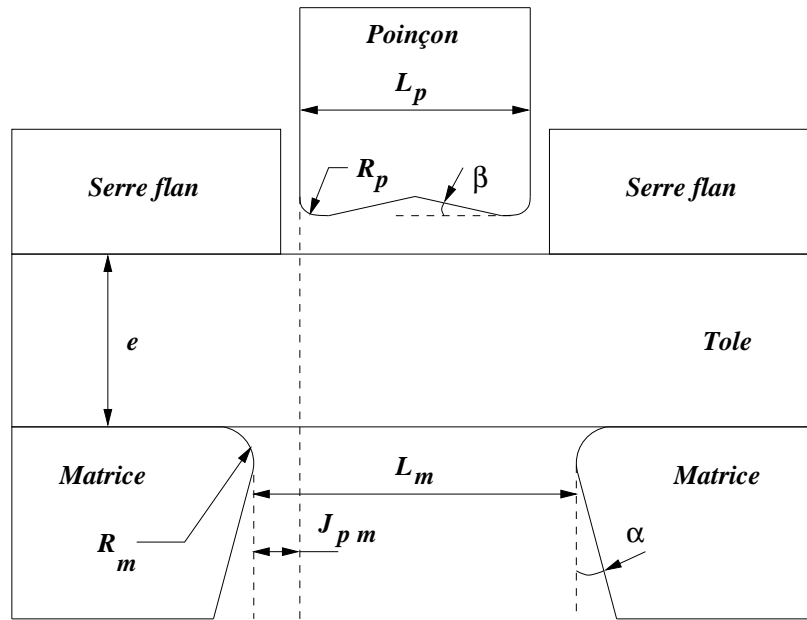


FIG. 1.2 – Éléments et géométrie d'un découpage.

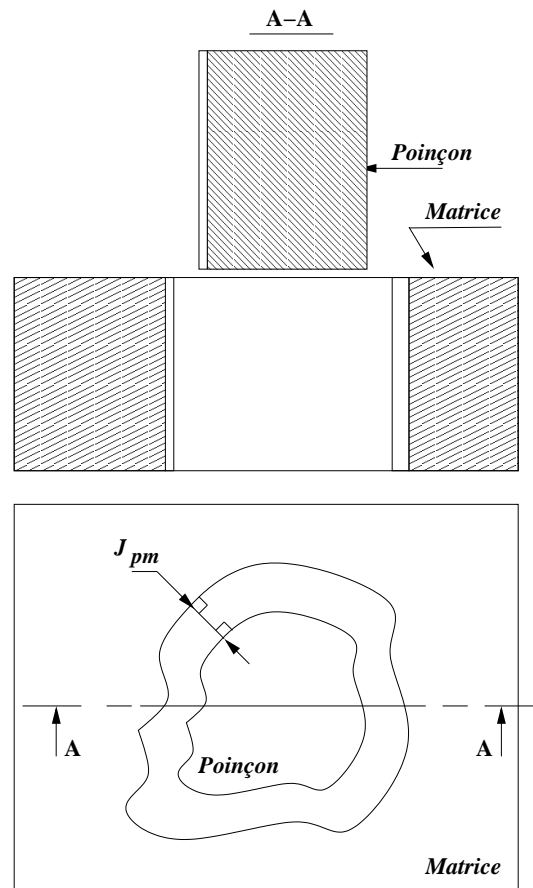


FIG. 1.3 – Définition du jeu poinçon-matrice pour un poinçon de forme quelconque.

où L_p et L_m représentent respectivement la largeur du poinçon et de la matrice dans le cas du découpage d'une forme rectangulaire. Dans le cas d'un découpage d'une forme circulaire, il s'agit des diamètres poinçon et matrice.

Le jeu est fréquemment exprimé en pourcentage de l'épaisseur de la tôle. Il est souvent compris entre 5% et 10% de cette épaisseur.

- Les rayons poinçon R_p et matrice R_m . Ils sont un indicateur de l'état d'usure des outils. Pour des outils neufs, ces rayons sont considérés comme des angles vifs.
- L'angle de dépouille α de la matrice, facilitant l'éjection. Il est de l'ordre de 9' à 12'.
- L'angle β en bout de poinçon. S'il existe, celui-ci est généralement de l'ordre de 1° à 2°.

Un poste de découpage tel que nous venons de le décrire est inclus dans un ensemble plus important que nous désignerons par le terme 'outil de découpage'. Plusieurs postes de découpage peuvent être présents dans le même outil de découpage.

C'est le cas dans la pratique pour des pièces plus ou moins complexes, qui ne peuvent pas toujours être obtenues en une seule opération. Les supports électroniques, par exemple, sont constitués d'un certain nombre de connexions, Fig. 1.8. L'obtention du produit final nécessite la réalisation du découpage en plusieurs étapes. On parle alors de découpage successif, ou découpage progressif⁴.

1.3 Le découpage progressif

C'est le type de découpage pratiqué dans un certain nombre d'entreprises travaillant pour l'industrie électronique. Celui-ci consiste à fabriquer une pièce d'un profil donné en grandes ou petites séries. Elle est obtenue en détachant successivement plusieurs contours d'une tôle.

Cette opération requiert un équipement spécifique, composé :

- d'une presse qui, à chaque coup, transmet à l'outil de découpage fixé sur le coulisseau, Fig. 1.4, un mouvement vertical alternatif permettant son ouverture et sa fermeture, apportant l'énergie nécessaire à la découpe.
- d'un système d'amenage mécanique, couplé à la presse, qui permet l'avance de la tôle à découper d'une valeur fixe appelée 'pas'.
- d'un outil dont les parties découpantes sont les poinçons et les matrices.
- d'un système d'alimentation (Fig. 1.5) constitué d'un dérouleur, d'un redresseur, d'un enrouleur/ récupérateur de bande.

L'ensemble de ces éléments constitue une ligne de découpage. On peut définir les caractéristiques dynamiques d'une telle ligne par la cadence de coupe de la presse (nombre de coups de presse par minute) et par la hauteur de course de la presse (différence entre le point mort haut et le point mort bas du système bielle manivelle de la presse).

Pour un découpage progressif, le mouvement de découpe peut alors être décomposé en quatre temps, Fig. 1.6.

Les éléments qui définissent la qualité des pièces obtenues par le découpage sont présentés dans la section suivante.

⁴On emploie également les termes de découpage à suite ou à suivre.

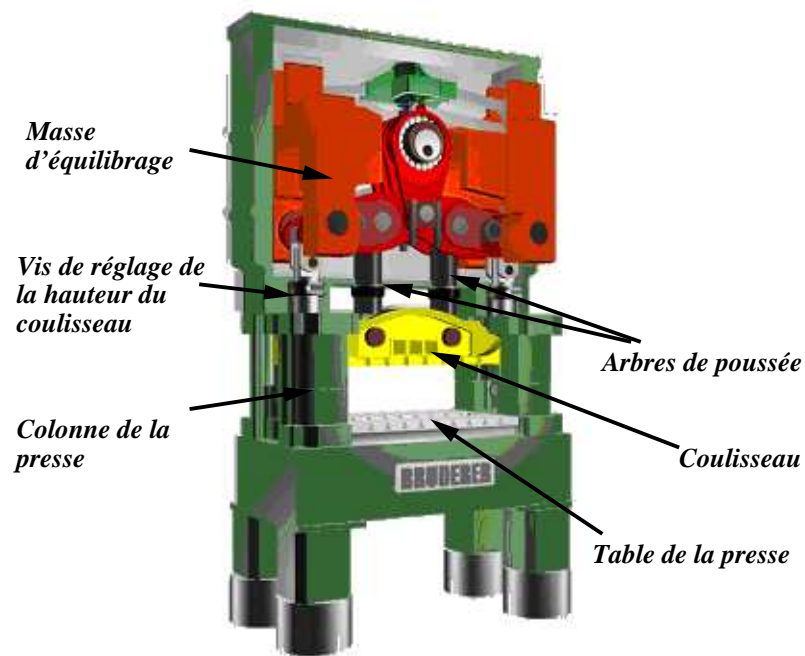


FIG. 1.4 – Représentation d'une presse de découpage type BRUDERER, BSTA 50 tonnes (d'après Meunier (2004)). L'ensemble matrice est fixe sur la table. Quant à l'ensemble porte-poinçon, il est fixé au coulisseau mobile.

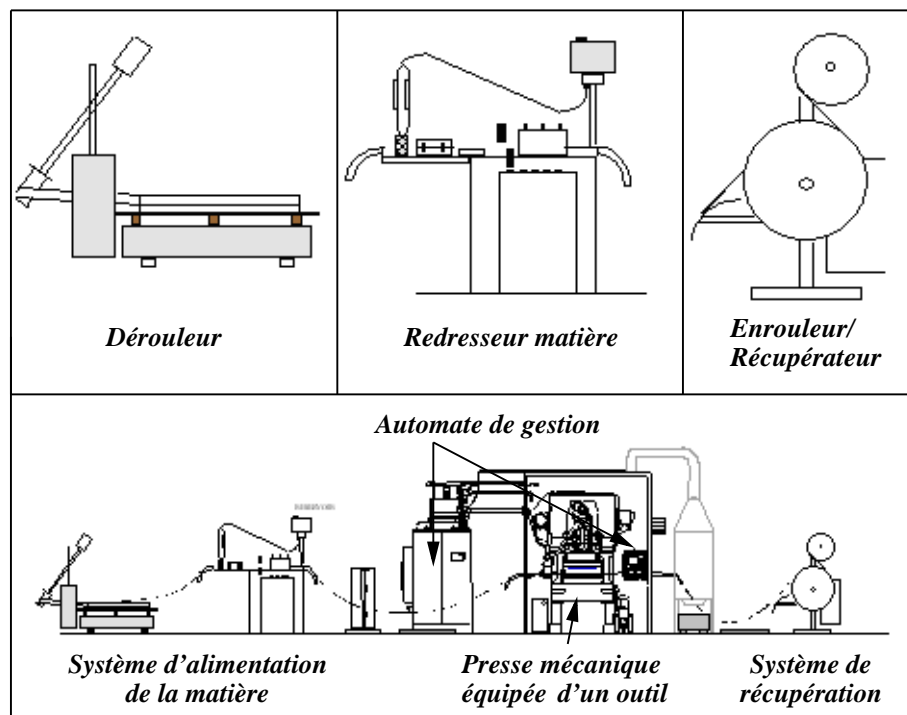


FIG. 1.5 – Représentation d'une ligne de découpage telle que l'on peut en trouver dans les entreprises fabriquant des produits dédiés à l'électronique (d'après Meunier (2004)).

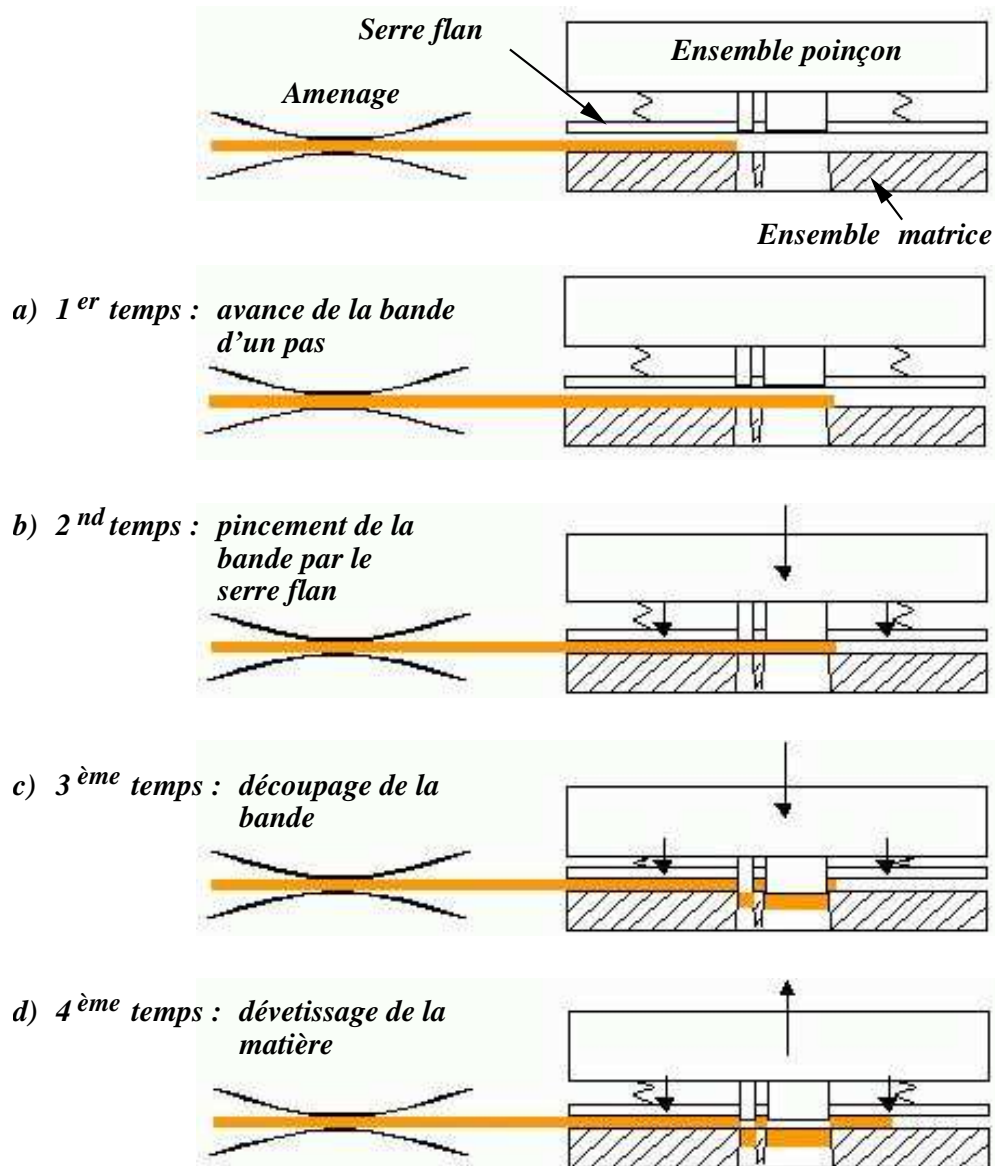


FIG. 1.6 – Représentation schématique des quatre temps d'une opération de découpage dans le cadre d'un découpage progressif (d'après Meunier (2004)). a) Le coulisseau est au point mort haut ; b) Le coulisseau commence à descendre ; c) Le coulisseau descend jusqu'au point mort bas ; d) Remontée du coulisseau jusqu'au point mort haut.

1.4 Aspect des pièces découpées

Les pièces découpées présentent un profil caractéristique dans l'épaisseur de la tôle, Fig. 1.7.

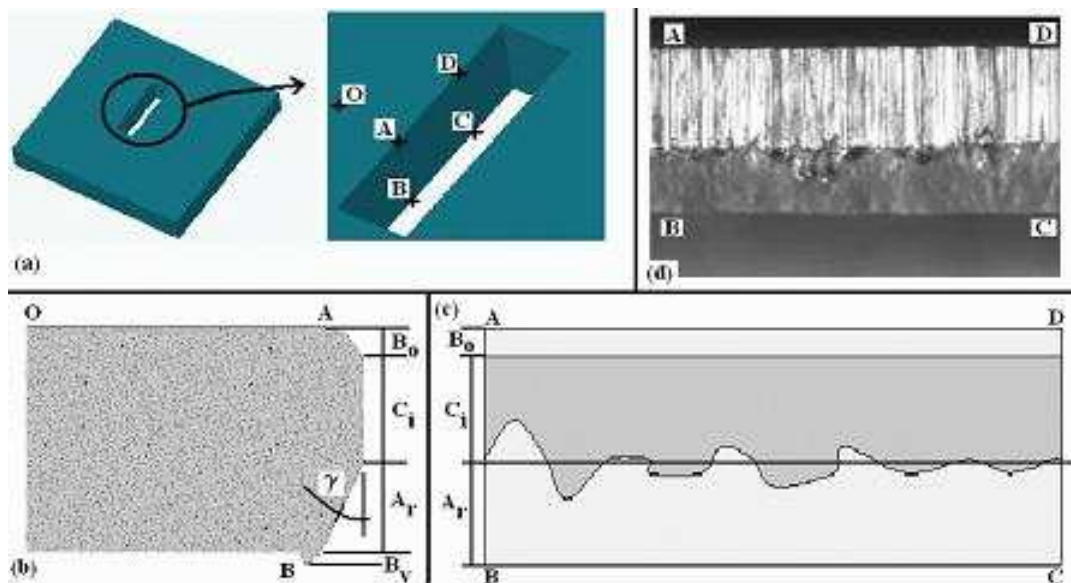


FIG. 1.7 – Profil d'une pièce découpée. (a) zone observée; (b) profil dans l'épaisseur, plan de coupe OAB, (c) profil dans l'épaisseur, plan ABCD; (d) exemple sur une tôle d'épaisseur 0.2 mm .

Celui-ci est généralement composé des zones suivantes :

- Un rayon de découpe B_o , appelé également 'bombé' ou 'tombée de découpe',
- Une partie lisse C_i ou 'partie cisailée',
- Une partie arrachée A_r faisant un angle γ avec la partie lisse,
- Une bavure B_v .

Un exemple de profil enregistré au microscopie optique, pour une tôle de 0.2 mm d'épaisseur en alliage cuivreux, est représenté (Fig. 1.7)_d. Sur cette image, on distingue nettement les parties cisailée et arrachée. En revanche, la tombée de découpe et la bavure ne sont ici pas clairement visibles.

Nous verrons dans le chapitre suivant comment ces différentes zones peuvent être reliées aux mécanismes de déformation de la tôle pendant la découpe. Notons simplement que c'est l'allure de ce profil qui détermine la qualité géométrique du produit final. Les tolérances autorisées sur les dimensions des différentes parties du profil sont fonction des exigences plus ou moins sévères du client (elles peuvent être définies pour des considérations d'ordre esthétique ou fonctionnel).

Quelques exemples de pièces obtenues en découpage progressif de précision de métaux fins sont présentés sur la Fig. 1.8 pour illustrer notre propos. La société AUGÉ Découpage est en particulier spécialisée dans la fabrication de leadframes pour circuits de puissance en alliages cuivreux. Sur ces supports métalliques sont soudés ou brasés des composants électroniques. Ils ont pour fonction de conduire l'électricité et de dissiper la chaleur émise par les composants en service.

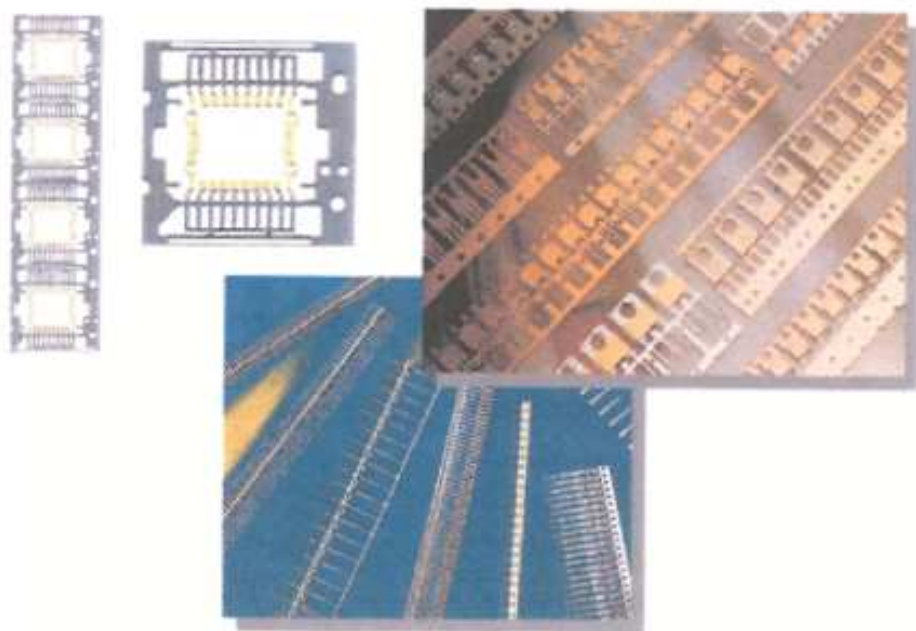


FIG. 1.8 – Exemples de pièces découpées dans le domaine de l'électronique, d'après Meunier (2004).

Enjeux des travaux engagés

Nous avons indiqué dans l'introduction générale de ce mémoire que les exigences industrielles auxquelles sont confrontées les entreprises spécialisées dans le découpage leur imposent de disposer de moyens et de méthodes plus scientifiques afin de mieux maîtriser le procédé et la qualité du produit fabriqué.

Les actions menées depuis 1999 par la société AUGÉ Découpage ont permis dans un premier temps de capitaliser une partie des connaissances et du savoir faire propre à cette entreprise, qui lui confèrent un rang de leader dans son domaine. Dans un second temps, des études expérimentales ont été engagées. Elles ont mis en évidence l'influence de certains paramètres technologiques sur l'opération de découpage. C'est le cas en particulier du jeu poinçon matrice, mais aussi de la cadence de presse et de la hauteur de course de la presse, c'est-à-dire de la vitesse de découpe. De nombreuses expériences ont également été effectuées sur le suivi d'usure des outils à travers l'évolution de la bavure, permettant d'établir une relation entre le nombre de coups effectués et l'évolution du profil géométrique des pièces découpées. D'autres problématiques ont été abordées telles que des analyses vibratoires ou acoustiques, notamment. Ces travaux contribuent à une meilleure maîtrise technologique du découpage.

Parallèlement à ces études expérimentales, le développement de modèles prédictifs du découpage constitue une approche performante pour améliorer la productivité et réduire les coûts. De nombreux secteurs industriels comme l'automobile ou l'aéronautique font aujourd'hui couramment appel aux techniques de simulation numérique. Ce n'est pas encore le cas dans l'industrie du découpage. En effet, ce procédé reste complexe à modéliser du fait des nombreux phénomènes intervenant au cours d'une découpe. L'objectif majeur

de notre travail est de remédier en partie à cette situation, en proposant un modèle de simulation du découpage aussi réaliste que possible. En particulier, il s'agit d'appréhender au mieux le comportement matériel de la tôle, paramètre dont l'influence est essentielle sur le résultat de la découpe. Les travaux présentés concernent le découpage de métaux en général. Les applications expérimentales proposées seront réalisées pour des essais de découpage de métaux fins (d'épaisseur inférieure à 0.5 mm) en alliage cuivreux.

Le chapitre suivant propose une étude bibliographique du découpage. Elle permettra de mettre en évidence l'ensemble des connaissances acquises dans ce domaine, ainsi que les points peu ou pas abordés dans la littérature actuellement.

Chapitre 2

Etat de l'art en découpage des métaux

Sommaire

Introduction	13
2.1 Historique des recherches en découpage	14
2.2 Connaissances issues de l'expérience	15
2.2.1 Introduction	15
2.2.2 Caractérisation d'un découpage	15
2.2.3 Comportement mécanique du matériau découpé	17
2.2.4 Principaux résultats expérimentaux	20
2.2.5 Bilan	23
2.3 Modèles théoriques en découpage	23
2.3.1 Introduction	23
2.3.2 Présentation des principaux modèles	23
2.3.3 Bilan	28
2.4 Simulation numérique du découpage	30
2.4.1 Introduction	30
2.4.2 Plates-formes de calcul	30
2.4.3 Problèmes traités par la simulation numérique	31
2.4.4 Méthodes numériques de résolution	31
2.4.5 Comportement matériel	33
2.4.6 Simulation de la propagation des fissures	37
2.4.7 Bilan	38
Conclusion	39

Introduction

Dans l'introduction générale de ce mémoire, nous avons vu que les choix technologiques reposent bien souvent sur des règles empiriques issues du savoir faire des découpeurs. En effet, bien que depuis un demi siècle de nombreux travaux axés sur une compréhension plus scientifique du découpage aient été entrepris, les résultats issus de ces recherches

ont été peu ou pas exploités par les industriels. A cela, une raison majeure, l'opération de découpage implique de nombreux phénomènes plus ou moins complexes, dont l'importance relative dépend non seulement des conditions inhérentes au procédé, mais également du matériau découpé. Or, les résultats de ces travaux reposent fréquemment sur des hypothèses simplificatrices. Ils ne peuvent donc s'appliquer que dans des cas limités, et sont le plus souvent inexploitable en l'état par les industriels.

On observe depuis quelques années un intérêt grandissant pour les techniques de simulation numérique. Si celles-ci ne sont pas encore en mesure de traiter des problèmes très complexes dans le cas du découpage, elles peuvent potentiellement apporter une aide à la décision pour les entreprises, en rationalisant l'ensemble des connaissances sur le sujet.

La présente recherche bibliographique a pour objectif de présenter une synthèse aussi complète que possible des connaissances acquises dans le domaine du découpage. Elle vient donc compléter le travail déjà réalisé par Tisley et Howard (1958), Johnson et Slater (1967), et plus récemment Maillard (1991), Hambli (1996), Wisselink (2000).

2.1 Historique des recherches en découpage

Les premiers travaux scientifiques importants sur le procédé de découpage se situent après la seconde guerre mondiale (Chang (1950); Krieg (1948), Keller (1951) et Godtschalck (1955) cités par Chabenat et Martin (1978); Zener (1948) cité par Balendra et Travis (1970)). Durant cette période, on commence à vouloir formaliser les connaissances et à dépasser les simples règles empiriques utilisées jusqu'alors. Les travaux expérimentaux portent essentiellement sur l'influence du jeu poinçon-matrice et la forme des outils. On s'attache surtout à analyser le procédé en termes d'effort et d'énergie. L'optimisation des efforts mis en jeu est un aspect très étudié.

A partir des années 60, certains auteurs se penchent sur la modélisation théorique du découpage (Jimma, 1963; Noble et Oxley, 1963; Hojo, 1967). Celle-ci permet notamment l'établissement de modèles prédictifs. Parallèlement, les études expérimentales portent sur une meilleure compréhension du comportement de la matière au cours du découpage (Noble et Oxley, 1963; Johnson et Slater, 1967). Enfin, comme l'illustrent Balendra et Travis (1970), la vitesse de découpage est un paramètre fortement étudié à cette période. En effet, l'amélioration de la productivité passe par une augmentation constante de la cadence de coupe.

Le début des années 70 marque les débuts de la simulation numérique appliquée au découpage. Lee et Kobayashi (1970) traitent par la méthode des éléments finis le problème d'indentation. Wong et Das (1975) proposent une des premières applications de cette méthode au cas du découpage. Expérimentalement, des méthodes de mesure des déformations telles que la visioplasticité sont appliquées au découpage (Dos Santos et Organ (1973), Kasuga *et al.*, cités par Hambli (1996)).

On note relativement peu de travaux concernant le découpage au cours des années 80. Durant cette période, on commence à s'intéresser à la simulation des mécanismes d'endommagement et de rupture en découpage (Ghosh *et al.*, 1985; Popat *et al.*, 1989; Maiti, 1982). Ceux-ci ont en effet, depuis une dizaine d'années, fait l'objet de nombreuses études. Les modèles théoriques proposent également des traitements plus élaborés de ces mécanismes, Atkins (1980).

Mais l'essor de la simulation numérique du découpage a réellement lieu dans les années 90. La plupart des simulations traitent de problèmes en deux dimensions, et incorporent des modèles de comportement et des outils numériques plus ou moins sophistiqués pour modéliser le problème (Maillard, 1991; Hambli, 1996; Brokken, 1999). Récemment, quelques résultats de simulation en trois dimensions ont été présentés (Murakawa *et al.*, 2001; Lee *et al.*, 2002). Des méthodes telles que les réseaux de neurones ont également commencées à être utilisées pour ce procédé (Wadi et Balendra (1999), Hambli (2002)).

Après ce rapide historique, nous commencerons par présenter les travaux basés sur les méthodes expérimentales. Un aperçu des modèles théoriques existants sera ensuite proposé. Enfin, nous reviendrons sur les développements actuels en terme de simulation numérique.

2.2 Connaissances issues de l'expérience

2.2.1 Introduction

Les travaux expérimentaux menés sur le découpage recouvrent plusieurs aspects et correspondent aux principaux problèmes rencontrés industriellement. La durée de vie des outils, le dimensionnement des presses, l'augmentation de la productivité, la réduction des nuisances sonores et la qualité des pièces découpées sont les problèmes les plus fréquemment étudiés. Nous porterons notre attention plus particulièrement sur ce dernier point, en relation avec les paramètres technologiques et matériels associés. Les autres aspects sont détaillés dans les références Schuler (1998), Chabenat et Martin (1978), Faura *et al.* (1996a), Faura *et al.* (1996b).

2.2.2 Caractérisation d'un découpage

Deux éléments sont principalement mis en avant pour caractériser un découpage :

- La courbe effort-déplacement du poinçon. Elle permet de dimensionner la presse en déterminant l'effort maximal que celle-ci devra supporter. Elle donne également des informations intéressantes sur le déroulement des différentes phases de la découpe, ainsi que sur certains paramètres du procédé comme l'usure des outils.
- Le profil de la pièce découpée. C'est lui qui détermine la qualité géométrique et parfois fonctionnelle du produit final. Suivant les utilisations ultérieures du produit, les exigences sont plus ou moins sévères. L'évolution de ce profil avec le nombre de pièces découpées renseigne également sur l'usure des outils.

La courbe effort-déplacement du poinçon

Celle-ci a fait l'objet de nombreuses descriptions dans la littérature. Un exemple type de courbe effort-déplacement du poinçon est représenté Fig. 2.1.

On observe généralement les phases suivantes (Johnson et Slater, 1967; Maillard, 1991) :

- **Portion OA** : Dans cette partie, l'effort poinçon évolue de façon linéaire. Le comportement du matériau est élastique.

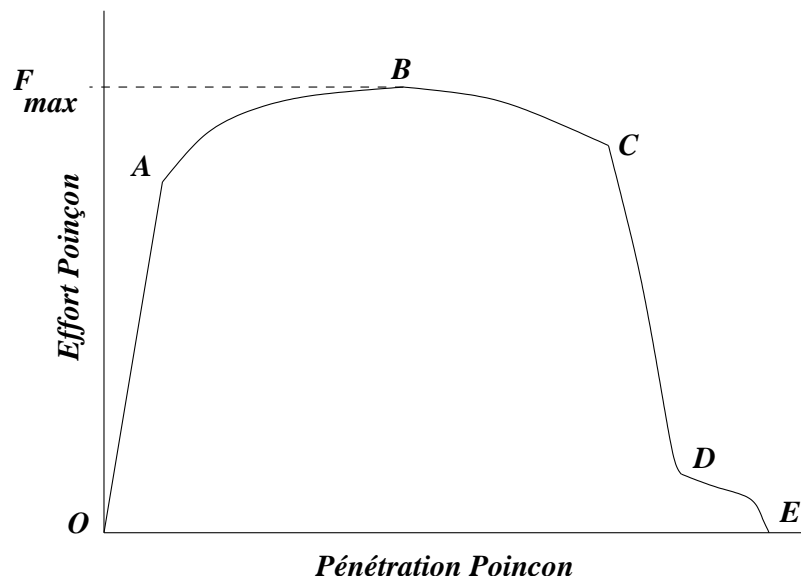


FIG. 2.1 – Exemple de courbe effort déplacement du poinçon en découpage.

- **Portion AB :** Il s'agit d'une phase non linéaire correspondant à la déformation plastique de la tôle, avec un écrouissage plus ou moins prononcé suivant le type de matériau. Atkins (1980) considère que l'effort maximal observé en B correspond à une instabilité plastique analogue à celle rencontrée dans un essai de traction. Il précise que ce point n'est pas associé à l'apparition d'une fissure.
- **Portion BC :** Parallèlement à la poursuite de la déformation plastique du matériau, l'endommagement se développe progressivement. Maillard (1991) précise que la diminution de l'effort poinçon observée est consécutive à la diminution de la section en cisaillement.
- **Portion CD :** Dans cette partie, une (ou des) fissure(s) s'amorce(nt) au niveau des arêtes poinçon et matrice. Elle(s) se propage(nt) rapidement, entraînant une chute importante de l'effort enregistré.
- **Portion DE :** En D, la rupture complète de la tôle est effective. La pénétration correspondant à ce point est donc en général appelée 'pénétration à rupture'. Celle-ci est la plupart du temps inférieure à l'épaisseur de la tôle. La partie DE correspond aux efforts de frottement dus à la poussée du copeau dans la matrice lors de la descente du poinçon. Il y a essentiellement frottement entre le poinçon et la tôle ajourée, et entre la matrice et le copeau.

L'allure de cette courbe dépend en premier lieu du matériau découpé. Certaines portions de courbe peuvent être plus ou moins importantes, voire inexistantes. Ainsi, pour des matériaux fragiles, la portion de courbe BC est réduite, et peut éventuellement ne pas apparaître clairement, Atkins (1980). Dans ce cas, la pénétration correspondant à l'effort maximal peut être proche de celle correspondant à l'initiation d'une (ou des) fissure(s). Dans le cas général, cependant, ces points sont distincts. Par ailleurs, une modification du réglage de certains paramètres technologiques entraînera une évolution de la courbe effort déplacement du poinçon, comme nous le verrons dans une section ultérieure de ce chapitre. Enfin, notons que les différentes portions de courbe ne sont pas toujours bien délimitées. Ainsi, les forces de frottement en matrice peuvent entraîner une résistance

supplémentaire de la tôle. La détermination du point D sera alors plus difficile, la chute de l'effort étant moins marquée, ou présentant des paliers, caractérisant des pertes de résistance successives (Johnson et Slater, 1967).

On peut à partir de ce type de diagramme, avoir accès à l'énergie requise pour le découpage. Elle correspond à l'aire située sous la courbe, Fig. 2.1. Elle représente la somme de l'énergie nécessaire pour déformer de façon élastique et plastique le matériau, de l'énergie liée à l'amorçage et à la propagation des fissures et de l'énergie due aux forces de frottement entre les différentes pièces.

Le profil de la pièce découpée

Celui-ci a été présenté au premier chapitre de ce mémoire (cf. Section 1.4). Il est possible de relier la formation des différentes zones caractéristiques du profil au diagramme effort déplacement du poinçon, Hambli (1996), Maillard (1991). Ainsi :

- La tombée de découpe peut être liée à la flexion de la tôle. Elle apparaît donc dans les phases élastique et plastique de la déformation (phase OB Fig. 2.1).
- La partie cisailée, consécutive aux déformations plastiques subies par la tôle, se forme dans la zone AB et dans une partie de la zone BC.
- La partie arrachée et la bavure, quant à elles, apparaissent dans la partie CD du déplacement du poinçon, puisque ce sont l'amorçage et la propagation des fissures qui sont responsables de leur formation.

Les différentes phases du découpage étant identifiées, nous allons détailler les mécanismes qui interviennent dans chacune d'elles.

2.2.3 Comportement mécanique du matériau découpé

On peut considérer, comme Wong et Das (1975), qu'il existe deux modes principaux de rupture de la tôle suivant la nature du matériau (cf. Fig. 2.2).

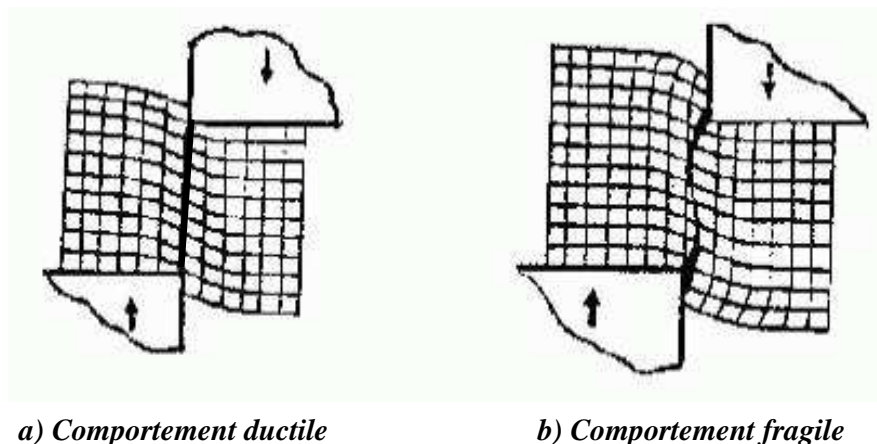


FIG. 2.2 – Les deux types de comportement à la rupture possibles (d'après Wong et Das (1975)).

- Si le matériau est ductile, la déformation de la tôle est consécutive à un écoulement plastique. Le profil de découpe présente alors un aspect presque complètement ci-

saillé. La pénétration à rupture du poinçon est donc dans ce cas pratiquement égale à l'épaisseur du matériau.

- Si le matériau est fragile, des fissures vont apparaître au niveau des arêtes poinçon et matrice et se propager brutalement dès le début de l'écoulement plastique, engendrant ainsi la rupture complète de la tôle avant que la pénétration n'atteigne l'épaisseur de la pièce découpée. Le profil de la pièce présente alors une forme en "S".

Maillard (1991) précise qu'en réalité, le comportement se situe entre ces deux cas extrêmes.

Osaki et Yoshikai, cités par Hambli (1996), indiquent que le premier stade de pénétration du poinçon correspond à une phase d'indentation du poinçon dans la tôle. Hambli le confirme en mesurant les déformations radiales près des arêtes poinçon et matrice, par l'intermédiaire de jauges de déformation collées sur les faces supérieure et inférieure de la tôle. L'écoulement de la matière dans cette phase de déformation est illustré Fig. 2.3. Osaki et Yoshikai montrent que plus le rapport entre le diamètre du poinçon et l'épaisseur de la tôle est grand, plus la phase d'indentation est négligeable.

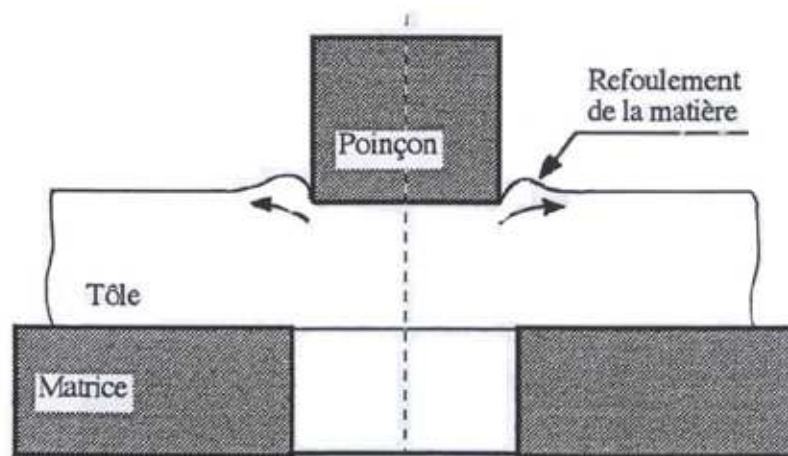


FIG. 2.3 – Refoulement de la matière dû à l'indentation du poinçon (découpage sans serre flan) (d'après Hambli (1996)).

Atkins (1980), indique que la phase d'écoulement plastique est le siège de déformations et d'amorçage de micro-fissures. Ces dernières proviennent de la rupture de particules de seconde phase, de la décohésion entre les inclusions et la matrice ou encore de la concentration de lignes de glissement dans la zone cisailée. Kondo, cité par Maillard (1991), décrit le mécanisme de la formation de la zone cisailée. Il est cohérent avec les indications données par Atkins, et est résumé Fig. 2.4. Des micro-fissures s'amorcent au niveau des arêtes de coupe. Il y a alors rupture des fibres, constituées de grains de matière, les unes après les autres. Lorsque l'outil passe sur ces fissures, elles sont raclées. Il se forme alors une surface lisse caractéristique de la zone cisailée, Maillard (1991).

Noble et Oxley (1963) indiquent que les fissures apparaissent dans les zones de plus fort gradient de dureté. Ils montrent que celles-ci correspondent aux endroits où le matériau est sollicité en traction (cf. Section 2.3).

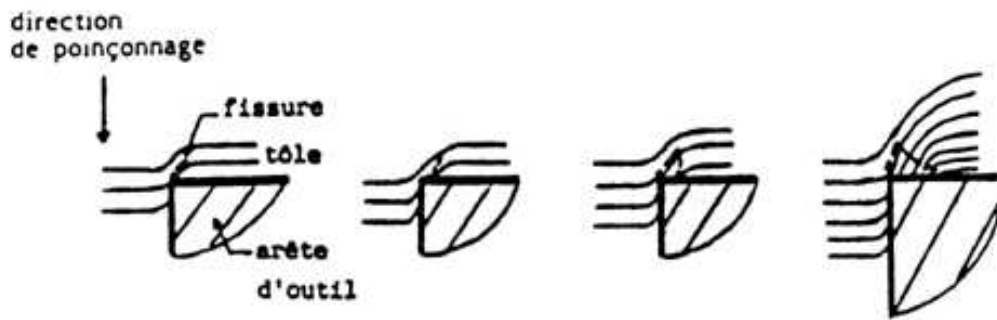


FIG. 2.4 – Mécanisme du cisaillement (Kondo, cité par Maillard (1991)).

Organ et Mellor, cités par Maillard (1991), et Jana et Ong (1989) ont observé des faciès de rupture. Les micrographies présentent des surfaces à cupules, qui sont caractéristiques de la rupture ductile (cf. Fig. 2.5).

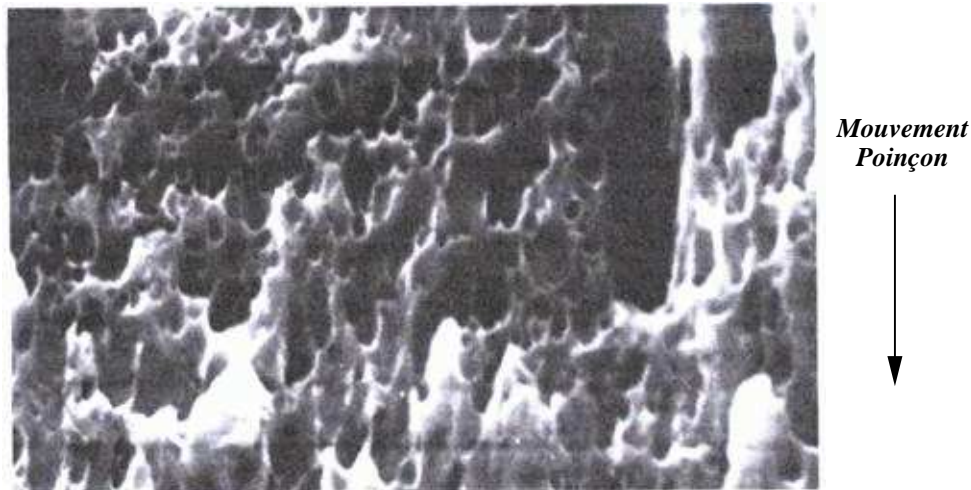


FIG. 2.5 – Faciès de rupture pour un aluminium 2024, d'épaisseur 9.5 mm , obtenu par un découpage à vitesse rapide (10 m.s^{-1}) ($\times 3100$) (Jana et Ong (1989)).

Pour terminer, citons quelques méthodes mises en œuvre pour analyser l'écoulement de la matière. Les mesures de micro-dureté dans l'épaisseur de la tôle donnent une indication sur l'écrouissage du matériau (Noble et Oxley, 1963). Les découpes partielles, utilisées par Maillard (1991), permettent d'observer l'écoulement à différents niveaux de pénétration. Dos Santos et Organ (1973) et Kasuga *et al.*, cités par Hambli (1996) utilisent quant à eux une mesure des déformations par l'intermédiaire de grilles imprimées dans l'épaisseur de la tôle, au niveau de la surface. Il est également possible de réaliser ce type de mesures sans impression de grilles, en utilisant une mesure de déformations par corrélation numérique d'images (Goijaerts, 1999; Aoki et Takahashi, 2003).

Outre la description du comportement des matériaux en découpage, les travaux expérimentaux se sont également attachés à caractériser l'évolution de la qualité géométrique des pièces découpées en fonction des paramètres technologiques du procédé.

2.2.4 Principaux résultats expérimentaux

Nous venons de rappeler les principaux mécanismes de déformation en découpage. Leur importance relative dépend en premier lieu du type de matériau découpé, d'où la nécessité de caractériser le comportement de la matière. Mais elle dépend également de nombreux paramètres tels que le jeu poinçon-matrice, la géométrie des outils, l'usure des outils, la vitesse de coupe, l'épaisseur des tôles découpées. L'expérience et les connaissances des découpeurs, ainsi que les nombreux travaux expérimentaux réalisés, ont contribué à une meilleure compréhension de l'évolution de la qualité d'un produit en fonction de ces paramètres. Il existe un certain nombre de références regroupant l'ensemble de ces connaissances (Chabenat et Martin, 1978; Tisley et Howard, 1958; Johnson et Slater, 1967; Schuler, 1967, 1998; Wick, 1984). Certaines comme Schuler (1967), Maillard (1999) ont pour vocation d'apporter une aide à la conception des outils et au dimensionnement des presses. En particulier, des formules empiriques et des abaques sont disponibles pour déterminer les efforts et les énergies nécessaires pour découper une pièce de dimensions données (Schuler, 1967, 1998). Quelques résultats sont présentés dans cette section.

Le jeu poinçon matrice

Il est bien connu que le jeu poinçon matrice influence de façon notable le profil d'une pièce découpée. On note en général les évolutions suivantes (Chabenat et Martin, 1978) :

- Si le jeu est trop faible, il peut arriver que les fissures amorcées côté poinçon et matrice ne se rejoignent pas. Il en résulte un dédoublement des surfaces lisses. De plus, un jeu trop faible entraîne une usure plus rapide des outils.
- Pour des jeux trop importants, la zone bombée, la bavure et l'angle de rupture sont plus importants.

Le réglage du jeu poinçon matrice n'obéit donc pas à une règle simple. C'est un problème complexe, qui est encore résolu par le savoir faire des hommes de l'art. Notons enfin qu'il est fréquemment fait mention dans la littérature de la notion de jeu 'optimal'. La définition de ce terme diffère selon les auteurs. En fait, il s'agit d'une dénomination impropre dans la mesure où le jeu dépend de la qualité géométrique du produit que l'on souhaite obtenir. Il est préférable de parler de réglage optimal du jeu poinçon matrice pour un découpage donné.

La géométrie des outils

Le fait de donner une forme en bout de poinçon, Fig. 2.6, entraîne une diminution de l'effort de découpe, Chang (1950). Lorsque la hauteur h vaut approximativement l'épaisseur de la tôle e , la diminution d'effort est de l'ordre de 30%, Chabenat et Martin (1978). En revanche, l'énergie requise varie peu.

L'usure des outils

Lorsque les outils s'usent, on constate un émoussement de leurs arêtes découpantes conduisant à une augmentation des rayons, Maillard (1991). Les conséquences sur la découpe sont principalement (Maillard, 1991; Choy et Balendra, 1996) :

- Une augmentation de la pénétration à rupture,

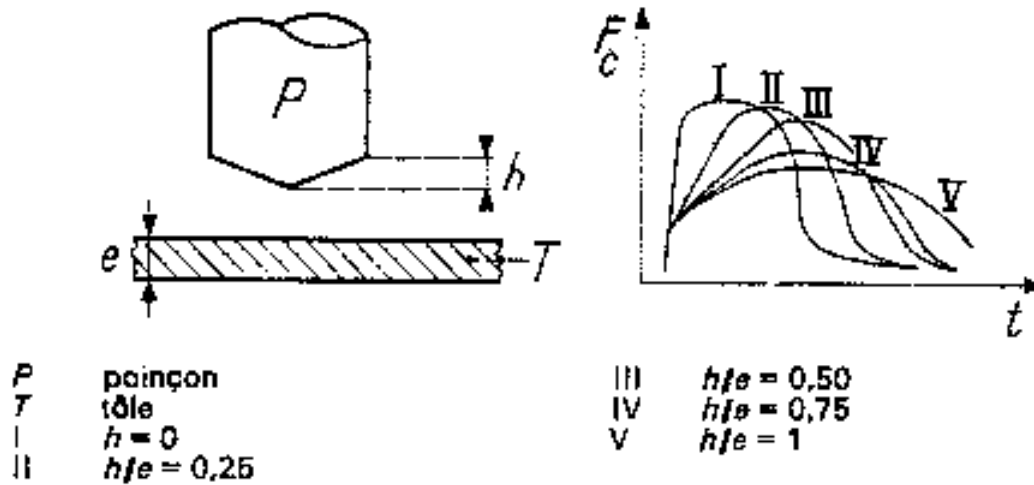


FIG. 2.6 – Evolution de l'effort de découpe pour différents angles de coupe, Chabenat et Martin (1978).

- Une augmentation de la tombée de découpe,
- Une augmentation de la bavure,
- Une augmentation de l'effort de découpe.

La vitesse de coupe

De nombreux travaux ont montré que la vitesse de coupe pouvait largement influencer l'aspect du produit découpé. Dès la fin des années 40, Zener (cité par Tisley et Howard (1958), Balendra et Travis (1970) et Johnson et Slater (1967)) publie des résultats sur ce paramètre. Lorsque l'on augmente la vitesse, on obtient des profils présentant une partie cisailée beaucoup plus importante (Tisley et Howard, 1958; Thoren, 1995). Pour Thoren, les vitesses intéressantes, si l'on souhaite augmenter la partie cisailée, se situent à partir de $10 - 12 \text{ m.s}^{-1}$. En fait, il faut noter que ces effets sont fortement dépendants du type de matériau découpé. Par conséquent, il est très difficile d'en donner une limite précise. Balendra et Travis (1970) indiquent que l'amélioration évoquée ci-dessus dépend de la dureté du matériau, ce qui est cohérent avec la remarque précédente. Poizat *et al.* (2002a) donnent un ordre de grandeur des taux de déformation par l'approximation grossière suivante :

$$\dot{\epsilon} = \frac{V_p}{e} \quad (2.1)$$

où V_p et e représentent respectivement la vitesse du poinçon et l'épaisseur de la tôle.

Cette expression montre que les taux de déformation sont d'autant plus élevés que les vitesses sont grandes, ou que les épaisseurs sont petites.

Il convient également d'associer aux effets de la vitesse, les effets de la température. En effet, l'augmentation de la vitesse de déformation s'accompagne localement d'une élévation de température qui entraîne un adoucissement du matériau (Meunier, 2004; Goijaerts,

1999). Cela se traduit sur le diagramme effort-déplacement par une chute de l'effort avec l'augmentation de la vitesse. Des travaux réalisés chez AUGÉ Découpage ont montré une diminution de l'effort maximal de l'ordre de 30% pour certains alliages cuivreux, pour des cadences de coupe variant de 100 cps.min^{-1} à 500 cps.min^{-1} . Si on considère constante en première approche la vitesse linéaire de découpage correspondante, on obtient une variation de 0.04 m.s^{-1} à 0.2 m.s^{-1} . Par conséquent, pour une tôle d'épaisseur 0.2 mm, les taux de déformation varient de 200 s^{-1} à 1000 s^{-1} environ.

Cette élévation locale de température, due à la dissipation thermique de la déformation plastique, peut conduire à une instabilité thermoplastique. C'est le cisaillement adiabatique (François *et al.*, 1995b; Roessig et Mason, 1999a,b; Balendra et Travis, 1970). On l'observe en particulier lorsque les vitesses sont si grandes que l'homogénéisation de la température par conduction ne joue plus (François *et al.*, 1995b).

Notons enfin que pour des températures élevées, un autre mécanisme peut intervenir, celui de la recristallisation dynamique (Johnson et Slater, 1967; François *et al.*, 1995b). Il y a alors conjointement écrouissage du matériau et adoucissement par élimination partielle de cet écrouissage.

On voit donc que la vitesse de coupe influence notablement la qualité des pièces découpées. Cependant, cette influence est difficile à quantifier. En effet, elle est liée à des phénomènes thermo-mécaniques relativement complexes. C'est néanmoins un aspect qu'il convient d'étudier et de prendre en compte, surtout pour des cadences élevées de coupe et des matériaux sensibles à la vitesse de déformation et à la température.

L'épaisseur du matériau (microstructure)

C'est un facteur important d'autant plus que la tendance actuelle dans l'industrie électronique est à la réduction des dimensions des composants. C'est plus précisément le rapport taille de grains sur l'épaisseur de la tôle qui intervient, ou encore le nombre de grains dans l'épaisseur. Ces effets sont connus sous le nom d'effets d'échelle. Raulea *et al.* (2001), Goijaerts (1999) et Geiger *et al.* (1996), Kals et Eckstein (1998) ont étudié ce paramètre pour le découpage.

Goijaerts observe une diminution de l'effort de découpe avec l'augmentation de la taille des grains pour une épaisseur donnée. Il précise que ceci peut s'expliquer par le mécanisme physique microscopique suivant. Les joints de grains constituent des obstacles au déplacement des dislocations. Si on augmente la taille des grains, le nombre des obstacles diminue, la déformation peut alors se faire plus facilement. Ce phénomène peut être représenté à l'échelle macroscopique par la relation de Hall-Petch.

Kals et Eckstein (1998) précisent que les proportions entre les parties cisailée, bombée et arrachée sont peu affectées par la réduction d'épaisseur. En revanche, la bavure et l'angle de rupture sont plus dépendants de ce paramètre. Pour des épaisseurs très faibles, de fortes irrégularités peuvent apparaître. Elles sont explicables par la mauvaise formabilité de grains non favorablement orientés, qui devient prépondérante si le nombre de grains dans l'épaisseur est réduit.

Il y a donc lieu de tenir compte des effets d'échelle lorsque le nombre de grains dans l'épaisseur est faible, donc lorsque le comportement macroscopique ne peut plus être considéré comme le comportement homogénéisé des mécanismes microscopiques. Comme pour l'influence de la vitesse de déformation, il est difficile de donner une limite précise de ce type d'effets.

Pour terminer cette section, nous proposons un tableau non exhaustif synthétisant quelques-uns des aspects expérimentaux étudiés en découpage (cf. Tab. 2.1).

2.2.5 Bilan

La courbe effort-déplacement du poinçon, ainsi que l'allure du profil géométrique de la pièce découpée permettent de caractériser un découpage. Différents mécanismes de déformation interviennent successivement au cours de la découpe. Le matériau présente d'abord un comportement élastique. Il se déforme ensuite plastiquement, en parallèle un endommagement progressif se développe. Celui-ci conduit à l'amorçage d'une ou plusieurs fissures près des arêtes poinçon et matrice qui, en se propageant, provoquent la séparation complète de la tôle. L'importance relative de ces mécanismes dépend du matériau découpé. Mais elle dépend également des paramètres technologiques tels que le jeu poinçon matrice, la forme et l'usure des outils et la cadence de coupe. Suivant le type de matériau découpé, les effets de la vitesse et de la température sont plus ou moins influents. Enfin, pour les tôles d'épaisseur faible ($\leq 0.5\text{ mm}$), des effets d'échelle peuvent intervenir, si le nombre de grains dans l'épaisseur est réduit.

La section suivante présente les différentes études analytiques réalisées sur le découpage.

2.3 Modèles théoriques en découpage

2.3.1 Introduction

A notre connaissance, il existe assez peu de modèles théoriques en découpage disponibles dans la littérature. Ceci est dû à la complexité et à la variété des phénomènes entrant en jeu, rendant les approches analytiques souvent inadéquates car trop simplificatrices. Si ces modèles sont difficilement exploitables industriellement, ils participent néanmoins à la compréhension du procédé d'une part, ils permettent des estimations prédictives de l'effort de découpage et/ou de l'allure du profil d'autre part. Les différents modèles ne sont pas ici présentés dans le détail. Nous reviendrons dans le chapitre 4 de ce mémoire sur la mise en œuvre de tels modèles pour la caractérisation du comportement matériel en découpage.

2.3.2 Présentation des principaux modèles

Selon Maillard (1991), les premiers calculs analytiques sur ce type de problème sont dus à Filon (1903). Il s'agit d'un calcul purement élastique, en considérant des efforts concentrés au niveau des arêtes poinçon et matrice. Ceci permet notamment d'obtenir la distribution de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur de la tôle. Hojo (1967) effectue également des calculs élastiques, mais en utilisant des efforts répartis, et en ajoutant les efforts de frottement. La distribution de la contrainte de cisaillement est conforme à celle obtenue par Filon, à savoir maximale près des surfaces supérieure et inférieure de la tôle. Ces approches sont néanmoins assez éloignées du problème qui nous intéresse, du fait du comportement élastique du matériau.

La première approche théorique importante utilisant un comportement plastique est due à Jimma (1963). Dans son analyse, l'auteur suppose que le matériau est non

TAB. 2.1 – Quelques travaux expérimentaux référencés en découpage.

Auteur	Matériaux	Méthodes	Sujet de l'étude
Chang (1950)	Zinc, cuivre, aluminium, acier Épaisseur : de 1 à 10 <i>mm</i>	-Jeu de 0 à 20% de l'épaisseur -Angle poinçon de 0 à 3°	-Caractérisation des matériaux -Méthode graphique de prédiction d'une découpe réalisée avec un angle en bout de poinçon
Noble et Oxley (1963) (rapport PERA)	Acier 0.1%C Épaisseur : ?	Mesures de micro-dureté	Détermination des niveaux d'écrouissage
Balendra et Travis (1970)	Acier Épaisseur : ≥ 3 <i>mm</i>	Vitesse de découpe jusqu'à 90 <i>m.s</i> ⁻¹	Influence de la vitesse de découpe
Dos Santos et Organ (1973)	Alliage d'aluminium Épaisseur : ≥ 1 <i>mm</i>	Visioplasticité	Mesures du champ de déformations dans l'épaisseur
Maillard (1991)	Acier XES Épaisseur : 2.5 <i>mm</i>	Découpes partielles	Analyse qualitative des déformations
Breitling <i>et al.</i> (1997)	Acier doux Épaisseur : de 0.6 à 1.5 <i>mm</i>	Instrumentation de presses de production	Moyens de contrôle du process en production
Goijaerts (1999)	Acier inoxydable X30Cr13 Épaisseur : 1 <i>mm</i>	Recuits de recristallisation	Influence de la taille des grains
Faura <i>et al.</i> (2001)	Acier inoxydable AISI304 Épaisseur : 1 <i>mm</i>	Presse de production	Développement d'outils d'aide à la décision
Hambli <i>et al.</i> (2003)	Acier 0.6%C Épaisseur : de 1.5 à 3.0 <i>mm</i>	Plans d'expérience	Influence des paramètres jeu, usure des outils, épaisseur
Meunier (2004)	Alliages cuivreux Épaisseur : 0.254 <i>mm</i>	Plans d'expérience	Influence des paramètres jeu, cadence de presse

écrouissable et prend de plus une hypothèse de déformations planes. Il recherche un champ de contraintes statiquement admissible en décomposant ce champ en trois zones distinctes (cf. Fig. 2.7).

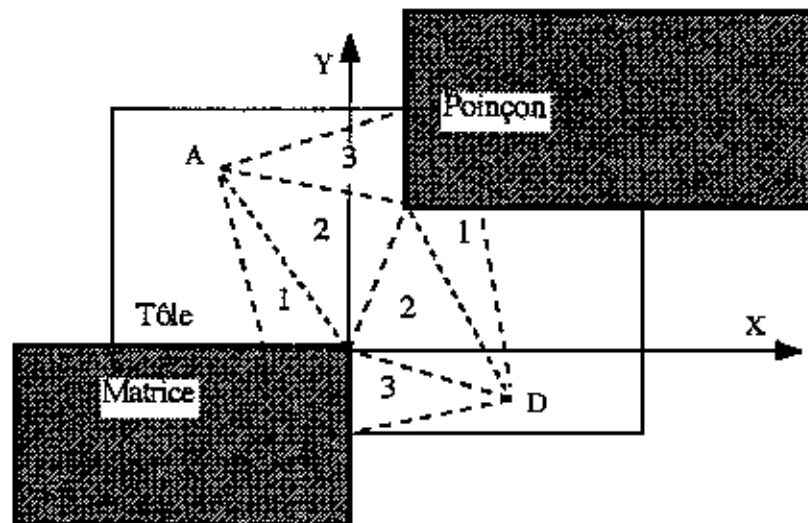


FIG. 2.7 – Champ de contraintes statiquement admissible (d'après Jimma (1963)).

Il utilise alors la théorie de l'analyse limite en plasticité pour aboutir à une estimation de l'effort en fonction de la pénétration du poinçon, du jeu poinçon matrice et des coefficients de frottement entre la tôle et les différentes parties des outils. Maillard (1991) indique que ce modèle est assez peu exploitable car l'indentification expérimentale des coefficients de frottement introduits est difficile. De plus, le caractère rigide plastique du comportement limite son champ d'utilisation.

Noble et Oxley (1963) font une analyse théorique relativement simple afin d'expliquer qualitativement pourquoi le lieu d'apparition des fissures correspond aux zones de plus fort gradient de dureté. Ils établissent que les zones susceptibles d'être sollicitées en traction se situent sur les faces latérales du poinçon et de la matrice, près des arêtes des outils (zones ABC et DHF Fig. 2.8).

Ces zones sont celles où le plus fort gradient de dureté est observé expérimentalement. Ils en déduisent, d'après l'analyse de la distribution des contraintes en fonction de la dureté, que si une fissure doit apparaître, elle s'établira préférentiellement dans ces zones. Ce modèle n'a pas vocation à décrire quantitativement le processus de découpage. Il constitue cependant un bon exemple d'une approche théorique simplifiée permettant une meilleure interprétation des observations expérimentales.

Atkins (1980) envisage le problème sous la forme d'un cisaillement simple. Cette hypothèse simplificatrice se justifie pour des jeux assez faibles (inférieurs à 5% de l'épaisseur environ). Une seconde hypothèse concerne la largeur de la zone déformée plastiquement, supposée constante (largeur de la zone hachurée, Fig. 2.9). Considérant l'effort maximal comme le lieu d'une instabilité plastique, il obtient, par annulation de la différentielle de l'effort, une relation entre la pénétration et la déformation. La comparaison avec les données disponibles dans la littérature montre un écart de $\pm 10\%$ environ, pour des jeux très faibles, voire nuls. Il étudie également le travail requis pour réaliser le découpage, en

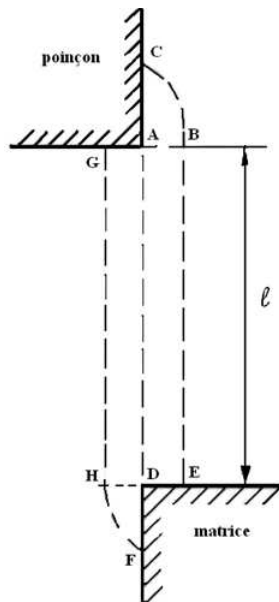


FIG. 2.8 – Zone de cisaillement (d'après Noble et Oxley (1963)).

portant particulièrement son attention sur la zone située après l'effort maximal. Celle-ci est, selon lui, à la fois le lieu d'un écoulement plastique et celui de formations de microfissures. En effet, il montre que le travail calculé sans tenir compte de ces microfissures est supérieur au travail réel, à partir d'une certaine valeur de pénétration, généralement située après l'effort maximal. Il précise que cette différence s'explique en partie par le fait que la zone non encore découpée est plus petite si on prend en compte la formation des microfissures (rectangle hachuré, (*Fig. 2.9*)_b). Par conséquent, dans l'expression du travail, ce n'est pas $t - \delta$ qui doit intervenir, mais la différence $t - \delta - l$. Les écarts entre les valeurs réelles et calculées restent néanmoins non négligeables, de l'ordre de 20%.

Ghosh *et al.* (1985) établissent, par une approche différente, des relations entre la déformation plastique équivalente correspondant à la pénétration à rupture, l'épaisseur du matériau et le jeu considéré comme optimal, c'est-à-dire selon les auteurs celui pour lequel la pénétration du poinçon à rupture est minimale. Ils considèrent l'élongation des fibres dans la zone déformée plastiquement et leurs ruptures successives, provoquées par la descente du poinçon (cf. Fig. 2.10). Leur analyse est basée sur un certain nombre de considérations géométriques, notamment sur la forme prise par les fibres après allongement. Ce modèle reste cependant limité car il est traité pour une configuration donnée de jeu 'optimal', et l'introduction d'un facteur correctif assez grossier sur l'effort maximal montre le caractère assez approximatif de ce modèle analytique.

Plus récemment, Zhou et Wierzbicki (1996) ont proposé un modèle analytique qu'ils considèrent comme une extension du modèle d'Atkins. Les principes de ce modèle sont indiqués Fig. 2.11. Contrairement à Atkins, ils ne négligent plus le mode de traction dans la direction ξ d'un élément (noté symboliquement AB Fig. 2.11). Par ailleurs, la zone de déformation n'est plus supposée constante. Elle est plus large au centre et prend la forme d'un parallélogramme. Enfin, la rupture est considérée comme apparaissant en surface pour se propager dans l'épaisseur du matériau. Un élément AB de la zone déformée est soumis à la fois à une rotation et à une traction. Ils en déduisent en particulier l'expression de l'effort de découpage en explicitant dQ , et en intégrant sur l'épaisseur de la tôle. La rupture intervient quand l'angle θ atteint une valeur critique θ_f . Ce modèle est

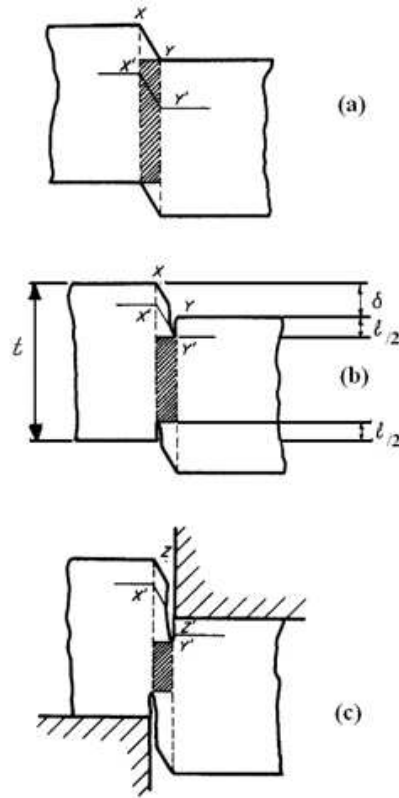


FIG. 2.9 – (a) déformation par cisaillement simple (b) écoulement plastique et fissuration (c) idem (b) mais pour une pénétration supérieure (d'après Atkins (1980)).

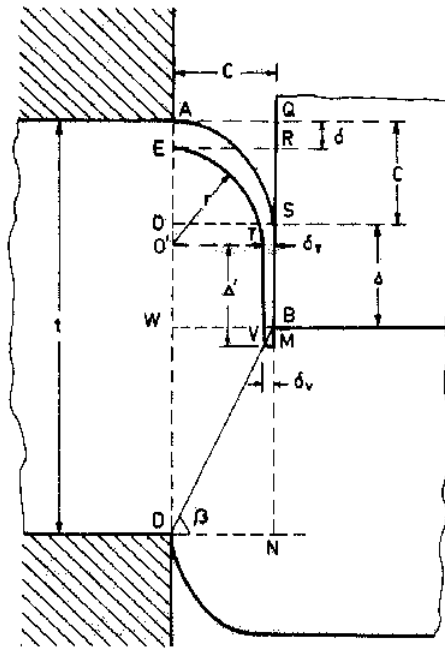


FIG. 2.10 – Géométrie de deux fibres déformées ASB et ETV distantes initialement de δ (d'après Ghosh *et al.* (1985)).

probablement le plus abouti actuellement. Les comparaisons avec l'expérience présentées par les auteurs montrent une erreur de l'ordre de 10%. Il est à noter que ce modèle a été utilisé par Maurel *et al.* (2002) récemment. Leur étude porte sur la détermination des contraintes résiduelles induites par le découpage. Le modèle de Zhou leur a fourni une base pour quantifier la déformation due à la traction et à la flexion, difficile à obtenir expérimentalement.

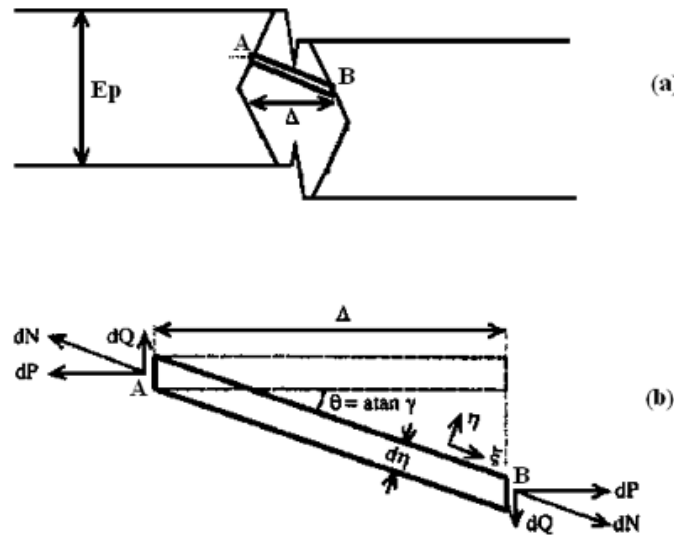


FIG. 2.11 – (a) Modèle de Zhou ('tension model') (b) Déformation d'un élément représentatif dans la zone cisailée : la force de cisaillement dQ engendre des déformations de traction suivant la direction ξ , Zhou et Wierzbicki (1996).

Enfin, Klingenberg et Singh (2003) ont présenté une étude analytique basée également sur le travail d'Atkins. Dans celle-ci, ils améliorent le précédent modèle en y incorporant la partie bombée de la découpe. Ils obtiennent une estimation de la contrainte d'écoulement et de la déformation plastique équivalente, en fonction de l'effort de découpe et d'un certain nombre de paramètres géométriques. La méthodologie utilisée est la suivante : ils enregistrent expérimentalement la courbe effort-déplacement du poinçon, cette courbe est transformée en loi de comportement pour leur modèle analytique. Ils utilisent alors cette loi pour la simulation numérique. Les résultats sont plus réalistes que ceux obtenus avec une loi de comportement établie uniquement en traction.

Pour terminer cette présentation des modèles théoriques disponibles dans la littérature, nous proposons un tableau récapitulatif des différentes approches envisagées (Tab. 2.2).

2.3.3 Bilan

Les études analytiques sur le découpage sont peu nombreuses. Les modèles proposés permettent une estimation de l'effort maximal de découpage et de la pénétration correspondante. Ils s'attachent également à prédire la pénétration correspondant à la rupture du matériau. Il est également possible d'obtenir une estimation du champ de contraintes et de déformations par ce type d'approche. Enfin, le but de ces modèles est de permettre une meilleure interprétation des observations expérimentales.

Auteur	Comportement du matériau	Hypothèses	Résultats
Filon ^a (1903)	Élastique	Forces ponctuelles	Distribution des contraintes
Jimma (1963)	Plastique parfait	Champ de contraintes décomposable en trois parties	Effort en fonction des coefficients de frottement
Noble et Oxley (1963)	Plastique écrouissable	Zone de déformations constante	Relations contraintes-dureté
Hojo (1967)	Élastique	Forces réparties, frottement	Distribution des contraintes
Atkins (1980)	Plastique écrouissable	Cisaillement simple, zone de déformations constante	Effort maximal et énergie de découpage
Ghosh <i>et al.</i> (1985)	Plastique écrouissable	Élongation et rupture des fibres	Relation entre épaisseur, jeu et déformation à rupture
Zhou et Wierzbicki (1996)	Plastique écrouissable	Cisaillement, mode de déformation en traction, zone de déformation plus large au centre	Estimation de l'effort de découpe
Klingenberg et Singh (2003)	Plastique écrouissable	Cisaillement, tombée de découpe due à la flexion	Relation contrainte-déformation

^a cité par Maillard (1991)

TAB. 2.2 – Les principaux modèles théoriques disponibles dans la littérature.

Compte tenu de la diversité des mécanismes entrant en jeu, la prédiction du découpage par des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis paraît plus adaptée car plus réaliste.

La dernière section de ce chapitre traite des développements numériques récents. Comme évoqué dans l'historique, de nombreux travaux ont en effet été effectués sur ce thème dans les dix dernières années.

2.4 Simulation numérique du découpage

2.4.1 Introduction

L'objectif de cette section est de dresser un bilan aussi exhaustif que possible de l'état de l'art actuel en matière de simulation numérique du découpage. Les points qui constituent aujourd'hui encore des questions ouvertes seront mis en évidence.

Depuis de nombreuses années, la méthode des éléments finis s'est largement imposée dans de nombreux domaines. De par la complexité et la diversité des problèmes qu'elle permet de traiter, elle peut être considérée comme la méthode numérique de référence en matière de simulation de procédés de mise en forme. L'accroissement très rapide des capacités informatiques autorise par ailleurs la résolution, dans des temps raisonnables, de problèmes industriels réels comportant un très grand nombre de degrés de liberté. Dans le cas du découpage, c'est également et presque exclusivement cette méthode qui est mise en œuvre. Nous proposons une présentation des différentes stratégies, associées à la M.E.F., envisagées pour simuler le découpage.

2.4.2 Plates-formes de calcul

On note depuis quelques années le développement de logiciels dédiés à la mise en forme des matériaux (OPTRIS, AUTOFORM, DEFORM, etc.). Cependant, ceux-ci sont le plus souvent tournés vers les procédés d'emboutissage ou de forgeage. Il n'existe pas, à notre connaissance, de logiciel éléments finis spécifiquement dédié au découpage des métaux. Hambli (2003) a proposé un logiciel, BLANKSOFT, destiné aux entreprises du découpage. Celui-ci est basé sur une approche théorique développée par l'auteur.

La simulation numérique est donc réalisée à l'aide de programmes éléments finis plus généraux, logiciels commerciaux ou développés en interne. Les principaux codes commerciaux utilisés sont ABAQUS (Rachik *et al.*, 2002; Hambli, 1996), ANSYS (Maiti *et al.*, 2000; Faura *et al.*, 1998), DEFORM (Taupin *et al.*, 1996; Fang et Zeng, 2002), MARC (Brokken, 1999; Pyttel *et al.*, 2000; Shuqin *et al.*, 2002). Plusieurs équipes ont développé leur propre logiciel de mise en forme (Bouchard (2000) avec FORGE2 développé au CEMEF, Gouveia *et al.* (2000) avec PLAST2 développé à l'Instituto Superior Tecnico de Lisbonne, Homsy *et al.* (1996) avec SIC développé à l'université de Compiègne, etc.).

Notons que l'on n'observe pas de réelle volonté de proposer un programme dédié exclusivement à cette opération de mise en forme. Il faut également souligner que les informations sur les temps de calcul d'une simulation sont rares. Les données trouvées dans la littérature sont trop anciennes pour être fiables, vue l'évolution des vitesses de calcul.

2.4.3 Problèmes traités par la simulation numérique

Les pièces découpées sont pour une large part de géométrie assez simple (rectangulaire ou circulaire). Dans de nombreux cas, il est donc possible de traiter le problème en deux dimensions, en adoptant une hypothèse de déformations planes ou d'axisymétrie. C'est ce type de problèmes qui est le plus largement étudié dans la littérature.

La majorité des travaux présentés concerne la prédiction du profil de découpe et de la courbe effort-déplacement du poinçon en fonction de certains paramètres technologiques. Les plus étudiés sont le jeu poinçon-matrice et l'usure des outils, souvent représentée par une augmentation des rayons, Cherouat et Saanouni (2003). Hambli (2001a) propose une méthodologie de prédiction de l'usure des outils. Les outils sont considérés comme rigides, et l'usure est déterminée en calculant le volume de matière perdu par le poinçon et la matrice par abrasion. Celui-ci est formulé analytiquement en fonction des réactions de contact calculées aux nœuds du maillage. Le résultat du calcul pour un découpage est alors multiplié par le nombre de pièces découpées pour obtenir une estimation de l'usure des outils.

On note assez peu d'études portant sur l'influence de la forme géométrique des poinçons. Singh *et al.* (1994) ont présenté une démarche originale dans laquelle ce n'est pas le découpage qui est simulé, mais le poinçon, modélisé en 3D. L'effort maximal de découpage est estimé analytiquement et appliqué en bout de poinçon. Les auteurs étudient alors les déformations axiale et radiale du poinçon, en fonction de sa forme géométrique. Ils montrent en particulier que pour un poinçon présentant un angle tel que celui représenté schématiquement Fig. 2.6, on observe une diminution de ses déformations. Une amélioration sensible du découpage est alors possible.

Le traitement de géométries complexes est encore peu abordé en découpage. Maiti *et al.* (2000) ont présenté des résultats de simulation en 2D portant sur un découpage double (deux empreintes côte à côte). Murakawa *et al.* (2001) ont réalisé des simulations en 3D pour prédire l'apparition de défauts dans les premières phases de l'opération, c'est-à-dire jusqu'au début de la formation de la zone cisailée (cf. Fig. 2.12). Les auteurs précisent que le temps de calcul est de l'ordre d'une journée. Wisselink (2000) a réalisé des simulations en 3D, qui concernent davantage le cisailage d'une tôle. Selon la complexité du problème, il indique que le temps de calcul varie de deux jours à une semaine. Brokken (1999) a effectué des calculs en trois dimensions, mais uniquement pour prédire la tombée de découpe. Il faut également noter que pour l'ensemble des simulations réalisées en 3D, les géométries restent simples. Enfin, Lee *et al.* (2002) proposent une méthodologie pour simuler la découpe progressive d'un leadframe. Mais les résultats présentés s'apparentent davantage à des simulations proches d'un essai d'emboutissage.

Dans la suite de cette section, nous nous limiterons aux développements numériques effectués pour des problèmes 2D. Les stratégies de résolution de l'équilibre global du système sont d'abord présentées. Puis, on s'intéressera à la modélisation du comportement matériel.

2.4.4 Méthodes numériques de résolution

Le découpage se caractérise par une mise en forme, limitée à une zone de faibles dimensions située entre le poinçon et la matrice, où les déformations sont intenses. Ceci conduit à des difficultés numériques importantes.

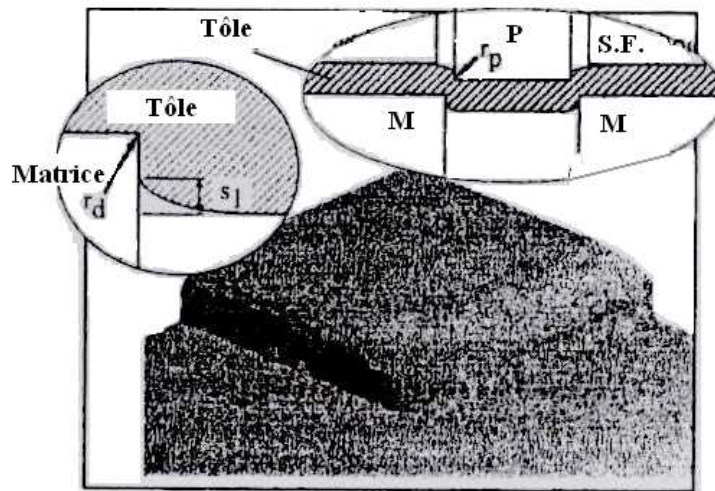


FIG. 2.12 – Exemple de simulation en 3D (P : poinçon, M : matrice, SF : serre flan) Murakawa *et al.* (2001).

Au niveau de l'équilibre global de la structure, deux grandes classes d'algorithmes existent : les algorithmes de type explicite et les algorithmes de type implicite. Les seconds présentent l'avantage d'être inconditionnellement stables, en revanche de fortes non linéarités (comme c'est le cas en découpage) peuvent les faire diverger. Les premiers sont conditionnellement stables, donc nécessitent un pas d'intégration très faible. Par contre, ils permettent de traiter des problèmes complexes qui mettent en défaut les algorithmes implicites. Dans le cas du découpage, les deux types d'algorithme sont présents dans la littérature. Rachik *et al.* (2002) présentent un algorithme dynamique explicite et expliquent leur choix par les raisons évoquées précédemment. Plus fréquemment, le découpage est traité comme un problème quasi-statique et un algorithme de type quasi-statique implicite est utilisé (Hambli, 1996; Maillard, 1991; Bouchard, 2000). Bellenger et Bussy (1998) utilisent une méthode spécifique pour résoudre l'équilibre de la structure : la méthode à grand incrément de temps.

Le fait que l'on soit ici en présence de grandes déformations implique qu'il y a lieu de s'intéresser à la configuration sur laquelle les équations d'équilibre sont formulées. Cela explique pourquoi la formulation lagrangienne réactualisée est la plus largement adoptée. On rappelle que dans cette formulation, la configuration de référence est la configuration courante. Les problèmes de distortion excessive des éléments finis ont conduit Brokken (1999), et d'autres auteurs tels que Rachik *et al.* (2002) à utiliser une formulation arbitraire lagrangienne eulérienne (ALE). Celle-ci combine les avantages des méthodes eulériennes et lagrangiennes, tout en éliminant une partie des problèmes dus à la déformation importante de certaines zones du maillage, Wisselink (2000). En règle générale, les problèmes de distortion du maillage ne peuvent être complètement résolus. L'emploi d'un algorithme de remaillage s'avère nécessaire (Homsy *et al.*, 1996; Wisselink, 2000). Hambli (1996) estime que le problème de remaillage ne se pose pas, puisque les éléments distordus sont les éléments rompus et qu'ils ne participent plus au calcul. Cependant, il est important de remarquer qu'une forte distortion des éléments influence notablement les résultats par le caractère localisé des déformations qu'elle induit. Homsy *et al.* ont publié une étude comparative entre des simulations effectuées avec et sans remaillage. Un exemple est

présenté Fig. 2.13. Il montre clairement l'amélioration apportée par cette méthode. Le contact entre la tôle et les outils est en effet simulé de façon plus réaliste. L'effort de découpage prédit s'en trouve amélioré, tout comme l'allure du profil de découpe.

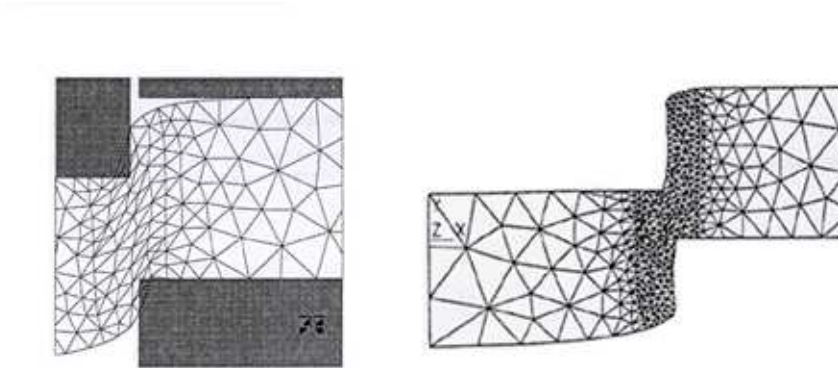


FIG. 2.13 – Allure de la déformée avec (à droite) et sans remaillage (à gauche), Homs *et al.* (1996).

D'une manière générale, nous voyons que les stratégies de résolution numérique et les outils employés tels que le remaillage ne sont pas anodins. Ils traduisent les difficultés rencontrées en simulation numérique du découpage.

Ayant abordé le problème d'un point de vue global, nous allons maintenant nous intéresser aux problèmes locaux, à savoir la modélisation mécanique du comportement de la matière.

2.4.5 Comportement matériel

Comme il a été décrit précédemment, différents mécanismes de déformation interviennent au cours du découpage. Rappelons brièvement les principales étapes de déformation de la tôle :

- La première phase correspond à un comportement globalement élastique de la tôle,
- Dans la seconde phase, le comportement est dominé par le mécanisme de plasticité avec ou sans écrouissage suivant le type de matériau,
- A partir d'un certain niveau de pénétration du poinçon, la tôle s'endommage parallèlement à l'augmentation de la déformation plastique,
- L'endommagement progressif qui se développe dans la bande de cisaillement conduit à la fissuration de la tôle,
- Enfin, dans la dernière phase la (ou les) fissure(s) se propage(nt) pour conduire à la rupture complète de la tôle.

C'est l'ensemble de ces processus de déformation qu'il importe de modéliser pour traduire le plus fidèlement possible le comportement du matériau. Les sections suivantes présentent les différentes approches proposées, en conservant l'ordre chronologique d'apparition des comportements discutés ci-avant.

Comportement matériel non endommageant

Il s'agit dans un premier temps de simuler le comportement dans les phases de déformation élastique et plastique du matériau.

Dans la majorité des simulations, le matériau est considéré comme étant rigide plastique ou élasto-plastique écrouissable (Fang et Zeng, 2002; Quinlan et Monaghan, 1998; Taupin *et al.*, 1996). Plus rarement, les effets de la vitesse et de la température sur le comportement sont pris en compte (Poizat *et al.*, 2002a,b, 2003; Goijaerts, 1999; Roessig et Mason, 1999b). On note en effet que l'influence de ces deux paramètres est encore peu étudiée sur le découpage, en simulation numérique. Goijaerts (1999) obtient des résultats en bon accord avec l'expérience pour des vitesses de découpage allant jusqu'à 10 mm.s^{-1} , soit des vitesses de déformation d'environ 10 s^{-1} . Au-delà, les écarts relevés sont importants, du fait de la non prise en compte dans ces travaux des effets de la température. Poizat *et al.* (2002a) présentent des travaux concernant des alliages cuivreux d'épaisseur 0.58 mm . Ils utilisent un modèle de comportement établi à partir de considérations microscopiques sur les dislocations et la microstructure, le modèle MTS. Si leur analyse reste qualitative, ils montrent néanmoins un échauffement du matériau au niveau des arêtes poinçon et matrice. Vaz et Bressan (2002) considèrent un échauffement adiabatique obtenu pour un matériau élasto-plastique, sans prise en compte des effets de la vitesse. Pour un acier d'épaisseur 0.5 mm et une vitesse de découpe de 0.75 m.s^{-1} , ils obtiennent un échauffement maximal près des arêtes de 92°C . Ils considèrent alors, pour leurs conditions d'essais, le découpage comme un procédé de mise en forme à froid.

La plupart des simulations concerne donc le découpage à vitesse lente. Les effets de la vitesse de déformation et de la température sont peu simulés actuellement. Cependant, pour des cadences de presse moyennes ou élevées, ce type d'effets ne peut plus être négligé.

Parallèlement aux grandes déformations plastiques, l'endommagement se développe de façon plus ou moins prononcée suivant le type de matériau. Il s'agit donc de reproduire ce comportement dans la simulation.

Prise en compte de l'endommagement du matériau

Dans la troisième phase, l'endommagement apparaît progressivement dans la tôle.

Deux modèles sont très largement utilisés en découpage des métaux. Le premier, qui s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, est fondé sur les notions de contrainte effective et d'équivalence en déformation. Le modèle, tel qu'il est actuellement couramment utilisé, a été proposé par Lemaître. Le second, basé sur l'observation microscopique de la matière, repose sur l'analyse de l'évolution des microcavités (nucléation, croissance et coalescence) mesurée par une variable appelée fraction volumique de cavités. Le modèle initial a été proposé par Gurson (1977). Il a été repris et modifié par de nombreux auteurs. Nous reviendrons sur la formulation détaillée de ces deux modèles dans la suite du mémoire. Notons dès à présent que la prise en compte de l'endommagement dans les lois de comportement est relativement complexe à développer numériquement. En particulier, Brokken (1999) précise qu'il faut être attentif dans ce type de formulation à la dépendance au maillage de la solution. Hambli (1996) propose une procédure assez simple pour s'affranchir de cette difficulté. Mais cela illustre le degré de difficulté supplémentaire introduit.

Il semble qu'il existe une divergence d'opinion sur l'aptitude des diverses formulations à proposer une solution fiable. Till et Kirchbner (2001), Komori (2001), Rachik *et al.*

(2002) ont réalisé des simulations avec le modèle de Gurson jusqu'à la rupture complète du matériau. Les résultats présentés concordent bien avec l'expérience. Klingenberg et Singh (2003), Samuel (1998), Yoshida *et al.* (2001) ont également présenté des résultats avec le modèle de Gurson, mais seulement jusqu'à l'initiation de la rupture. Ils montrent que l'initiation de la rupture est correctement prédite. Post et Voncken (1996) aboutissent à la même conclusion, mais en ayant modifié la façon dont la nucléation des cavités dans la matière est calculée. En prenant un écart-type important dans la distribution normale, les auteurs indiquent qu'ils sont alors en mesure de simuler correctement la nucléation dans le cas de grandes déformations, ce qui n'est pas le cas sinon. Enfin, Hambli a publié une étude comparative entre le modèle de Lemaître et le modèle de Gurson, Hambli (2001b). Le résultat est sans appel : seul le modèle de Lemaître donne des résultats réalistes (cf. Fig. 2.14).

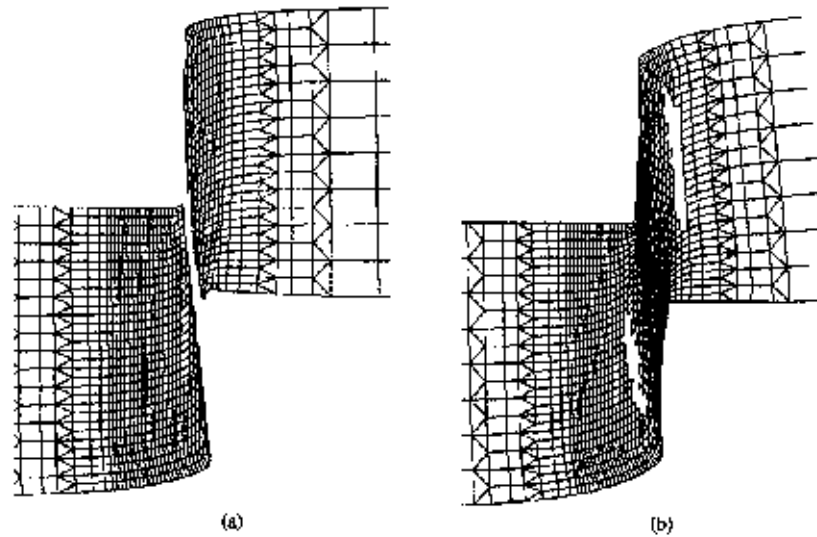


FIG. 2.14 – Comparaison entre le modèle de Lemaître (a) et de Gurson (b) (selon Hambli (2001b)).

Signalons enfin que de nombreux travaux présentés ne modélisent pas un tel couplage déformation-endommagement. Ce sont les approches dites découplées, détaillées ultérieurement dans ce chapitre.

Différentes modélisations sont donc envisageables pour le mécanisme d'endommagement. Le choix de l'une ou de l'autre dépend non seulement du matériau découpé, mais également des caractéristiques technologiques (jeu poinçon/matrice, usure des outils, cadence de coupe, entre autres) du découpage simulé.

Prédiction de l'initiation des fissures

Contrairement à la plupart des procédés de mise en forme, l'objectif du découpage est d'aboutir à l'initiation et à la propagation de fissures jusqu'à la séparation complète de la tôle. De ce fait, il est nécessaire de se doter des outils permettant de prédire avec précision le lieu et l'instant d'amorçage d'une ou plusieurs fissures. Comme l'indique Bouchard (2000), cette prédiction est difficile, puisque l'amorçage dépend non seulement des conditions de chargement, mais aussi et surtout des inclusions et des micro-défauts présents dans le matériau. Le second problème inhérent à l'apparition d'une fissure réside dans le

fait que l'on se situe à la frontière entre deux domaines de la mécanique généralement distincts : la mécanique des milieux continus et la mécanique de la rupture. Les outils développés en mécanique de la rupture supposent en règle générale que le matériau est pré-fissuré. A l'inverse, en mécanique des milieux continus appliquée à la mise en forme, les critères de prédiction d'un défaut sont plutôt utilisés pour éviter son apparition (cas des courbes limites de formage en emboutissage par exemple).

Il existe une grande variété d'approches possibles pour détecter la possibilité d'occurrence d'une fissure. Citons :

- Les courbes limites de formage (C.L.F.) précédemment évoquées. Déterminées expérimentalement, elles permettent de caractériser la limite de formabilité d'un matériau. Cependant, elles sont établies pour des trajets de déformation spécifiques, et ne sont donc pas applicables en l'état à tout type d'essai.
- Les critères en endommagement critique. L'idée de base est assez simple. Elle consiste à considérer qu'un élément de volume est rompu lorsque l'endommagement calculé dans ce volume dépasse une valeur critique intrinsèque au matériau.
- Les critères en contraintes critiques. Bouchard (2000) propose par exemple de considérer qu'une fissure est amorcée dans une zone si la contrainte maximale calculée dans cette zone dépasse une valeur critique caractéristique du matériau. La fissure s'amorce alors perpendiculairement à la direction de cette contrainte maximale.
- Les approches par fonctions indicatrices de l'endommagement ou critères de rupture. La méthode consiste à construire une fonction Υ de l'histoire des déformations et des contraintes, représentative de l'état d'endommagement dans le matériau. Lorsque Υ atteint un seuil critique D_C , une fissure s'amorce. Ces critères sont à rapprocher des critères en endommagement critique. Cependant, il est préférable de les distinguer dans la mesure où Υ ne représente pas toujours l'endommagement en tant que tel. De plus, il n'y a pas dans ce cas de couplage déformation-endommagement. Ces approches sont donc dites approches découplées.

C'est ce dernier point qui fait l'objet des développements suivants. En effet, en découpage, cette stratégie est fréquemment adoptée, essentiellement pour sa simplicité de mise en œuvre, puisqu'elle ne nécessite qu'une étape de post-traitement des informations disponibles sur les déformations et les contraintes dans la tôle.

Les critères de rupture disponibles dans la littérature sont nombreux, et de natures différentes suivant leur mode d'élaboration. On distingue principalement les critères reposant sur des lois d'évolution de cavités et les critères de nature empirique. Pour les seconds, ce n'est pas directement l'endommagement qui est calculé, mais une fonction des déformations et des contraintes supposée liée à son évolution. Les premiers sont, quant à eux, basés sur des considérations microscopiques. Les lois d'évolution ainsi déterminées représentent l'accroissement de l'endommagement du matériau par croissance des cavités. On trouvera un inventaire de ces différents critères dans Hambli (1996).

Quel critère utiliser en découpage ? Certains auteurs se sont intéressés à leur validité respective pour ce procédé (Hambli, 1996; Goijaerts, 1999; Gouveia *et al.*, 2000; Hambli et Reszka, 2002). Il faut en effet noter que dans la plupart des cas ces critères de rupture ont été établis pour des problèmes spécifiques qui n'ont pas grand chose à voir avec les modes de sollicitation rencontrés en découpage. Gouveia *et al.* (2000) ont testé les critères de Cockroft-Latham et de Oyane. Ils indiquent que seul le premier permet d'identifier clairement la zone de rupture. Goijaerts (1999) a confronté quatre critères : le critère de

Freudenthal, le critère de Cockroft-Latham, le critère de Rice et Tracey et enfin le critère de Oyane. La valeur critique de chacun des critères étant identifiée pour une configuration de paramètres donnée, le jeu poinçon matrice est ensuite modifié et l'aptitude de chacun des critères à prédire le profil en fonction du jeu est testée. D'après cette étude, seuls les critères de Oyane et de Rice et Tracey, moyennant une adaptation, permettent une prédiction en accord avec l'expérience. Hambli et Reszka (2002) ont utilisé une technique d'identification inverse sur de nombreux critères (dix critères testés). Selon leurs conclusions, les meilleurs résultats sont obtenus avec le critère de Rice et Tracey.

Bien que ces études fournissent des indications comparatives, force est de constater que les points de vue ne sont pas toujours concordants.

L'avantage majeur de l'approche découplée réside dans sa simplicité de mise en œuvre numérique. Cependant, il a été mis en évidence que ce type de modélisation souffre d'un manque de précision (Hambli et Reszka, 2002; Maillard, 1991). En effet, à partir d'un certain niveau de pénétration du poinçon, les courbes effort déplacement numériques ont tendance à surestimer l'effort poinçon. Ceci est dû au fait que la dégradation progressive des caractéristiques matérielles due à l'endommagement n'est pas prise en compte.

Comme pour l'approche couplée, une telle modélisation est conditionnée non seulement par le type de matériau, mais également par les caractéristiques technologiques du découpage considéré. Elle ne pourra être satisfaisante que si l'endommagement du matériau reste peu important (cas des matériaux peu ductiles, par exemple).

2.4.6 Simulation de la propagation des fissures

Une fois la fissure amorcée, il est nécessaire de connaître la façon dont celle-ci va se propager. Il importe donc de déterminer, d'une part, la stabilité de la fissure, c'est-à-dire le fait que l'accroissement de la fissure est conditionné par un accroissement des conditions de chargement. D'autre part, si le chargement n'est pas symétrique, il faut connaître sa direction de propagation. On entre donc ici dans le domaine de la mécanique de la rupture.

Cependant, on observe dans le cas du découpage assez peu de calculs basés sur les outils de la mécanique de la rupture. La première raison tient certainement aux difficultés rencontrées dans ce type d'approche. Une seconde explication, sans doute la principale, réside dans le fait qu'en découpage le trajet de fissuration est relativement simple. Sauf conditions d'essais particulières, la fissure se propage dans l'immense majorité des cas entre les arêtes poinçon et matrice. De ce fait, il est suffisant de mettre en place des méthodes numériques de traitement de la rupture, sans étudier le milieu fissuré en tant que tel. On distingue cinq méthodes appliquées au cas du découpage.

Certains auteurs modélisent l'évolution d'une fissure par la propagation d'une zone totalement endommagée, c'est-à-dire pour laquelle la valeur d'endommagement calculée dépasse le seuil critique (Maillard, 1991; Hambli, 1996). Pour éliminer du calcul les éléments déclarés rompus, ils annulent la raideur correspondante, de sorte que ces éléments n'interviennent plus dans la réponse de la structure. Il n'y a pas ici nécessité de mettre en place une procédure de séparation du maillage. Lorsque la fissure affleure deux bords distincts, la tôle est déclarée rompue. Ainsi, le calcul de l'endommagement permet à la fois de prédire l'apparition de la fissure et sa propagation.

La seconde méthode est la technique d'élimination des éléments. Lorsqu'un élément satisfait au critère de rupture préalablement défini, il est supprimé du maillage initial. En général, on choisit comme valeur pour un élément fini la moyenne obtenue à partir

des valeurs calculées aux points de Gauss de celui-ci. Ce type de méthode est implémenté dans certains logiciels commerciaux tels que DEFORM-2D. On trouve donc de nombreux travaux basés sur celle-ci (Taupin *et al.*, 1996; Fang et Zeng, 2002; Quinlan et Monaghan, 1998; Jeong *et al.*, 1996; Ko *et al.*, 1997). Golovaschenko (1999) et Poizat *et al.* (2002a) présentent également des résultats numériques avec cette méthode.

Komori (2001) précise que la destruction d'éléments entraîne une diminution de la masse globale et donc une certaine imprécision. Il utilise alors la méthode de séparation des noeuds, qui consiste à dédoubler un noeud du maillage et donc à 'ouvrir' une fissure à l'endroit où l'amorçage a lieu. Hatanaka *et al.* (2003) suivent la même logique pour la propagation d'une fissure.

Brokken (1999) met en avant le fait que ces trois premières méthodes sont clairement dépendantes du maillage utilisé. La méthode qu'il propose repose sur le fait qu'une fissure n'est pas astreinte à se propager suivant une arête de l'élément, comme dans la simple séparation des noeuds. Le chemin de propagation est déterminé suivant la direction de potentiel d'endommagement¹ maximal. Une étape de remaillage suit pour accommoder l'accroissement de la ligne de rupture. Bien que la fissure ne soit pas astreinte à se propager en fonction du maillage (c'est-à-dire à l'élément voisin dans le cas de l'élimination d'éléments, ou suivant les arêtes des éléments dans le cas de la séparation des noeuds), elle n'envisage pas non plus le traitement d'un matériau fissuré par les concepts propres à la mécanique de la rupture. Là encore, il s'agit d'une méthode que l'on peut qualifier de numérique.

Enfin, la dernière méthode est fondée sur la mécanique de la rupture. Il s'agit donc réellement de l'étude d'un milieu fissuré, par opposition avec les précédentes méthodes. Bouchard *et al.* (2001) présentent une application au cas du découpage de travaux reposant sur la mécanique non linéaire de la rupture. Il s'agit d'une des rares applications de ce domaine au découpage. Ils mettent en évidence un autre problème, celui du risque d'interpénétration des lèvres d'une fissure, qui n'est pas pris en compte dans leur calcul.

On voit que la phase de propagation d'une fissure, comme la phase d'initiation, peut être abordée par différentes approches. Il faut cependant noter que, excepté dans le cas de la mécanique de la rupture, ces méthodes sont essentiellement numériques. Malgré tout, si l'on considère que le trajet de la fissure est a priori connu, ces méthodes présentent un rapport simplicité-précision très satisfaisant.

On trouvera dans le manuscrit de Habraken (2001) de plus amples développements sur l'ensemble des modèles d'endommagement et de rupture présentés succinctement dans ce chapitre.

2.4.7 Bilan

La plupart des travaux traitant de la simulation numérique du découpage sont réalisés par la méthode des éléments finis. Les problèmes traités concernent en général des géométries simples, pour lesquelles une modélisation en deux dimensions suffit. Une attention particulière doit être apportée à la résolution de l'équilibre global de la structure, dans la mesure où de nombreuses non linéarités interviennent en découpage. La description du comportement du matériau nécessite l'introduction de lois de comportement

¹le potentiel d'endommagement est la fonction critère normée par la valeur critique à rupture. Il évolue donc entre les valeurs 0 et 1. L'appellation potentiel d'endommagement est préférée par les auteurs pour éviter les confusions.

de type plastique ou élasto-plastique. Pour prendre en compte les effets de la vitesse et de la température, une modélisation thermo-élasto-viscoplastique du comportement est nécessaire. Différentes méthodes ont été proposées pour simuler les phases d'endommagement et de rupture de la tôle. La première approche consiste en une approche couplée, dans laquelle l'endommagement affecte les caractéristiques mécaniques du matériau. La rupture est alors modélisée par la propagation d'une zone complètement endommagée. Une seconde approche, plus simple à mettre en œuvre, mais a priori moins précise, est une méthode découplée, dans laquelle une fonction indicatrice de l'endommagement renseigne sur la possibilité d'amorçage d'une fissure. La propagation d'une fissure peut alors être simulée par élimination d'éléments, par séparation des nœuds, ou encore par d'autres techniques faisant appel aux notions de la mécanique de la rupture.

Les différentes formulations mises en œuvre dans la littérature, depuis 1995, sont résumées Tab. 2.3. Wisselink (2000) propose un tableau similaire dans sa thèse. Les références citées ici sont cohérentes avec son travail, et sont enrichies des dernières publications sur le sujet. Signalons enfin les travaux concernant le découpage fin (Hambli, 2001c; Filice et Micari, 2001; Li et Peng, 2002; Kwak *et al.*, 2002; Chen *et al.*, 2002). Ils ne sont pas référencés dans ce tableau, mais les développements numériques proposés sont très similaires à ceux présentés dans cette section.

Conclusion

Ce chapitre présente un état bibliographique non exhaustif² des travaux menés sur le découpage depuis 1950 jusqu'à nos jours. Il concerne à la fois les études expérimentales, théoriques et numériques.

Expérimentalement, on caractérise généralement un découpage par la courbe effort déplacement du poinçon et par le profil géométrique dans l'épaisseur de la pièce découpée. L'allure de cette courbe, et l'importance relative des différentes zones du profil, sont liées au type de matériau découpé, ainsi qu'aux différents paramètres technologiques. Les principaux mécanismes de déformation intervenant au cours de la découpe ont été présentés, notamment le mécanisme conduisant à la fissuration de la tôle, à savoir l'endommagement plastique ductile.

Théoriquement, les principaux modèles proposés dans la littérature s'attachent à prédire l'effort maximal de découpage, ainsi qu'à décrire qualitativement ou quantitativement les champs de déformation et de contrainte dans la tôle. Outre l'interprétation des observations expérimentales, leur objectif majeur est de proposer des formulations analytiques prédictives en première approche.

Numériquement, la plupart des applications présentées est basée sur la méthode des éléments finis, et concerne des calculs en deux dimensions. Les déformations importantes subies par la tôle conduisent à des difficultés dans la résolution globale du problème. L'emploi de méthodes telles que le remaillage s'avère indispensable. Au niveau local, il importe de modéliser successivement les différentes phases de déformation de la tôle : comportement élasto-plastique, ou thermo-élasto-viscoplastique écrouissable, endommagement, fissuration, rupture. Plusieurs approches sont envisagées dans la littérature. En particulier, les phases d'endommagement et de rupture sont traitées par deux modélisations distinctes, suivant que l'on considère ou non un couplage déformation-endommagement. La phase

²basé sur 87 des 122 références bibliographiques indexées dans ce mémoire.

Auteur	Logiciel	2D/3D ^a	Remail. ^b	Comportement ^c	Rupture
Homs <i>et al.</i> (1996)	SIC	axi	X	elas. plas.	Gurson
Jeong <i>et al.</i> (1996)	DEFORM2D	axi	X	vis. plas. th.	crit., élim.él.
Post et Voncken (1996)	MARC	axi	X	plas.	Gurson
Taupin <i>et al.</i> (1996)	DEFORM2D	axi	X	elas. plas.	crit. ^d , élim.él. ^e
Ko <i>et al.</i> (1997)	DEFORM2D	dp	X	vis. plas. th.	crit., élim.él.
Bellenger et Bussy (1998)	OPTIFIA	dp		elas. vis. plas.	couplé ^f
Faura <i>et al.</i> (1998)	ANSYS 5.1	dp		elas. plas.	crit.
Quinlan et Monaghan (1998)	DEFORM2D	axi	X	plas.	crit., élim.él.
Samuel (1998)	MARC	axi	X	elas. plas.	Gurson
Golovaschenko (1999)	Code propre	dp		elas. plas.	crit., élim.él.
Brokken <i>et al.</i> (2000)	MARC	dp,axi	X	elas. vis. plas. th.	crit., prop.
Gouveia <i>et al.</i> (2000)	PLAST2	axi	X	plas.	crit.
Maiti <i>et al.</i> (2000)	ANSYS 5.3	dp		elas. plas.	N.E. ^g
Pyttel <i>et al.</i> (2000)	MARC	axi	X	elas. plas.	crit.
Wisselink (2000)	Code propre	dp	X	elas. plas.	crit.
Bouchard <i>et al.</i> (2001)	FORGE2	axi	X	elas. plas.	crit., méc. rup. ^h
Komori (2001)	Code propre	dp	X	plas.	Gurson, sép. no.
Murakawa <i>et al.</i> (2001)	DEFORM3D	3D	X	plas.	N.E.
Till et Kirchbner (2001)	ABAQUS	axi	X	plas.	Gurson
Yoshida <i>et al.</i> (2001)	Code propre	dp	X	plas.	Gurson
Fang et Zeng (2002)	DEFORM2D	axi	X	plas.	crit., élim.él.
Hambli et Reszka (2002)	ABAQUS	axi		elas. plas.	couplé
Lee <i>et al.</i> (2002)	PAM STAMP	3D		elas. plas.	
Mariage <i>et al.</i> (2002)	FORGE2	axi	X	elas. vis. plas. th.	couplé, élim.él.
Rachik <i>et al.</i> (2002)	ABAQUS	axi		elas. plas.	Gurson
Vaz et Bressan (2002)	Code propre (?)	axi	X	elas. plas. th.	N.E.
Klingenberg et Singh (2003)	ABAQUS	dp		plas.	Gurson
Poizat <i>et al.</i> (2003)	ABAQUS	dp	X	elas. vis. plas. th.	crit.
Lemiale et Picart (2004)	Code propre	dp	X	elas. vis. plas. th.	crit., prop.

^adp : déformations planes, axi : axisymétrie^bRemail. : Remallage (X=Oui)^celas. : élasto, plas. : plastique, vis. : visco, th. : avec effets thermiques^dcrit. : critère de rupture^eélim.él. : élimination d'éléments, sép. no. : séparation de noeuds, prop. : propagation de fissures^fcouplé : modèle d'endommagement de type phénoménologique^gN.E. : Non étudiée^hméc. rup. : mécanique de la rupture

TAB. 2.3 – Synthèse des différents travaux réalisés depuis 1995 pour la simulation numérique du découpage.

de rupture est dans la majorité des travaux abordée par des méthodes numériques, sans faire appel à l'étude d'un milieu fissuré. Ce choix se justifie par le fait que dans le cas du découpage, le trajet de propagation d'une fissure est a priori connu : celle-ci se propagera entre les arêtes poinçon et matrice.

L'objectif principal des travaux présentés dans ce mémoire est la mise en œuvre d'un outil de simulation numérique du découpage de métaux fins. Compte tenu des éléments présents dans la littérature, la stratégie retenue est la suivante :

- Développement d'un logiciel spécifique basé sur la méthode des éléments finis, et dédié à l'industrie du découpage. Celui-ci devra permettre dans un premier temps de traiter des problèmes en deux dimensions pour un découpage simple (un seul couple d'outils) ou multiple.
- Prise en compte des effets de la vitesse et de la température dans le comportement du matériau, à travers un modèle de comportement thermo-élasto-viscoplastique.
- Etant donné les divergences constatées quant au traitement de la phase d'endommagement conduisant à l'initiation d'une ou plusieurs fissures au sein du matériau, le choix est fait de développer à la fois des méthodes couplées et non couplées.
- Puisque le problème de propagation de la fissure reste relativement simple dans le cas du découpage, une méthode numérique de traitement de la rupture paraît suffisante en première approche.
- L'étude du découpage de métaux en faible épaisseur n'a pas fait l'objet de nombreuses investigations dans la littérature. C'est pourquoi un dispositif expérimental de découpage est mis en place dans le cadre de ces travaux. Il permettra l'analyse du comportement des matériaux, et plus particulièrement des alliages cuivreux, en faible épaisseur.

Le chapitre suivant présente les modèles mécaniques mis en œuvre pour la simulation numérique du découpage.

Chapitre 3

Contribution à la modélisation mécanique du découpage

Sommaire

Introduction	44
3.1 Description d'un solide déformable	44
3.1.1 Description géométrique	44
3.1.2 Mesures des déformations	45
3.1.3 Mesure des taux de déformation	47
3.1.4 Configuration intermédiaire relâchée	47
3.1.5 Additivité des taux de déformation	48
3.1.6 Tenseurs des contraintes	48
3.2 Equilibre d'un milieu continu	49
3.3 Description du contact et du frottement entre deux solides .	51
3.3.1 Contact	51
3.3.2 Frottement	52
3.4 Comportements matériels non endommageants	53
3.4.1 Mécanismes physiques de la déformation pour les métaux cristallins	53
3.4.2 Élasto-plasticité avec écrouissage	54
3.4.3 Élasto-viscoplasticité	59
3.5 Modèles d'endommagement	62
3.5.1 Mécanismes physiques d'endommagement	63
3.5.2 Modèle d'endommagement de type Lemaître	64
3.5.3 Modèle d'endommagement de type Gurson	68
3.6 Comportement matériel en transformations finies	73
3.6.1 Principe d'objectivité	74
3.6.2 Formulation des lois de comportement	75
3.7 Détection de l'amorçage d'une fissure macroscopique	77
3.7.1 Introduction	77
3.7.2 Prédiction de l'amorçage d'une fissure par une zone complètement endommagée	77
3.7.3 Les modèles non couplés	77

3.8 Propagation d'une fissure	81
3.8.1 Problématique	81
3.8.2 Stratégie retenue	82
Conclusion	82

Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons présenté brièvement le principe du découpage. Au terme de cette présentation, les objectifs de notre étude ont été discutés. Il s'agit principalement de mettre en œuvre un outil de simulation numérique du découpage, en intégrant dans la modélisation les différentes phases de déformation du matériau.

Le second chapitre a permis de dresser un état de l'art des études menées sur le découpage. Les différentes approches envisagées pour la simulation numérique du découpage ont été présentées.

Le présent chapitre reprend l'ensemble de la modélisation mécanique retenue dans nos travaux. Nous commencerons par rappeler les notions de base nécessaires à la caractérisation des déformations et des contraintes au sein de la tôle. Puis, les équations du mouvement seront formulées, en s'attachant à montrer les termes que l'on doit prendre en compte et ceux que l'on peut négliger. Les inégalités fondamentales intervenant dans tout problème de contact unilatéral avec frottement seront ensuite rappelées. Puis, nous présenterons la modélisation proprement dite du comportement matériel. Celle-ci sera présentée en respectant l'ordre chronologique d'apparition des différents comportements du matériau au cours d'une découpe. La modélisation du comportement élasto-plastique, ainsi que la prise en compte des effets de la vitesse de déformation et de la température seront tout d'abord discutées. Puis, les différentes approches retenues pour modéliser l'endommagement progressif de la tôle seront présentées. Enfin, la dernière phase de déformation, à savoir la rupture de la tôle, sera traitée en considérant en premier lieu l'amorçage d'une fissure, puis la propagation d'une fissure amorcée.

3.1 Description d'un solide déformable

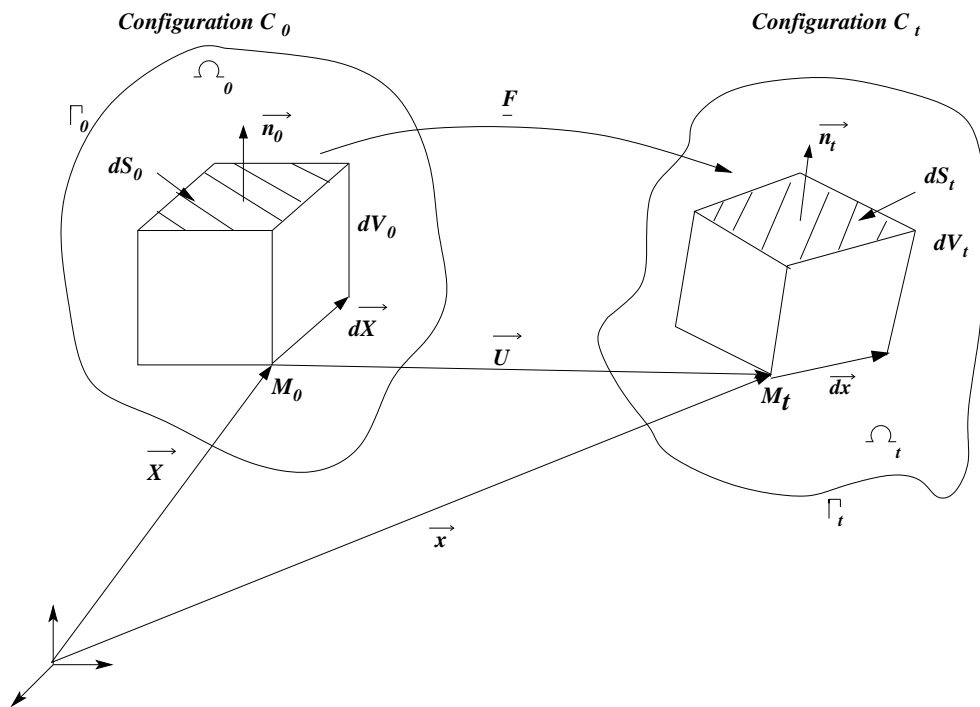
3.1.1 Description géométrique

On considère un solide déformable qui occupe la position Ω_0 à l'instant initial t_0 et la position Ω_t à un instant t .

Les notations introduites dans cette section sont résumées Fig. 3.1. En particulier, un volume et une surface élémentaires sont notés respectivement dV et dS .

La configuration de référence \mathcal{C}_0 à l'instant t_0 correspondant par exemple à l'état non déformé du solide, est appelée la configuration lagrangienne (ou matérielle). La configuration courante \mathcal{C}_t du solide déformé à l'instant t est dite configuration eulérienne (ou spatiale).

On note \vec{X} le vecteur caractérisant la position d'un point M dans Ω_0 (cf. Fig. 3.1). De même, \vec{x} repère la position de ce même point M dans Ω_t . Le mouvement est donc décrit par la donnée de :

FIG. 3.1 – Configuration de référence (C_0) et configuration courante (C_t).

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad (3.1)$$

On introduit \vec{U} le vecteur déplacement de M entre C_0 et C_t , de sorte que l'on a :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{U}(\vec{X}, t) \quad (3.2)$$

3.1.2 Mesures des déformations

L'équation (3.2) définit le mouvement global du solide. Pour caractériser ce qui se passe au voisinage du point M , on est conduit à introduire le tenseur gradient de transformation \underline{F} , qui s'identifie à l'application linéaire tangente de \vec{x} , tel que :

$$d\vec{x} = \underline{F}(\vec{X}, t) d\vec{X} \quad (3.3)$$

Les composantes F_{ij} de \underline{F} s'écrivent donc :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.4)$$

où x_i et X_j sont respectivement les composantes de \vec{x} et \vec{X} .

A partir de \underline{F} , on définit le jacobien J par :

$$J = \det \underline{F} \quad (3.5)$$

Celui-ci est essentiel dans la mesure où il caractérise le changement de volume entre Ω_0 et Ω_t . On a donc :

$$J = \frac{dV_t}{dV_0} \quad (3.6)$$

En particulier, J est tel que : $J > 0$.

Cependant, \underline{F} ne décrit que le mouvement local du solide. Pour décrire les déformations, il faut introduire de nouveaux tenseurs en éliminant la rotation du solide. Les tenseurs de déformations les plus classiquement définis sont les suivants :

- Le tenseur de Cauchy-Green droit \underline{C} :

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} \quad (3.7)$$

Ce tenseur est dit lagrangien, c'est-à-dire défini sur la configuration lagrangienne.

- Le tenseur de Cauchy-Green gauche \underline{B} :

$$\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T \quad (3.8)$$

C'est un tenseur eulérien.

- Le tenseur de Green-Lagrange \underline{E} :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{1}) \quad (3.9)$$

C'est un tenseur lagrangien.

- Le tenseur d'Euler-Almansi \underline{A} :

$$\underline{A} = \frac{1}{2} (\underline{1} - \underline{B}^{-1}) \quad (3.10)$$

C'est un tenseur eulérien.

Il est également possible de caractériser les déformations du solide en décomposant le tenseur \underline{F} en un tenseur de rotation et un tenseur de déformation pure. En effet, on peut décomposer \underline{F} de manière unique sous la forme :

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R} \quad (3.11)$$

La décomposition (3.11) est appelée décomposition polaire de \underline{F} . Dans cette expression, \underline{R} est un tenseur orthogonal (tenseur de rotation), tandis que \underline{U} et \underline{V} sont des tenseurs symétriques définis positifs, respectivement appelés tenseur de déformation pure droit et gauche.

Avec cette décomposition, on obtient alors :

$$\underline{C} = \underline{U}^2 \quad \text{et} \quad \underline{B} = \underline{V}^2 \quad (3.12)$$

Et l'on obtient deux familles de tenseurs de déformations (tenseurs de Hill) par (Sidoroff, 1982) :

$$\begin{cases} \underline{e}_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\underline{U}^\alpha - \underline{1}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \underline{e}_0 = \log \underline{U} & \text{pour } \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

et

$$\begin{cases} \underline{\bar{e}}_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\underline{V}^\alpha - \underline{1}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \underline{\bar{e}}_0 = \log \underline{V} & \text{pour } \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

A noter que \underline{E} et \underline{A} correspondent respectivement à \underline{e}_2 et $\underline{\bar{e}}_{-2}$.

3.1.3 Mesure des taux de déformation

Soit \vec{v} la vitesse du point M_t telle que $\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$.

Le tenseur gradient des vitesses \underline{L} est défini par :

$$\underline{L} = \underline{\text{grad}} \vec{v} \quad \text{ou} \quad L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.15)$$

Soit :

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \quad (3.16)$$

On définit également le tenseur des taux de déformations \underline{D} par¹ :

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) = \underline{L}^s \quad (3.17)$$

De même, le tenseur des taux de rotation \underline{W} est donné par² :

$$\underline{W} = \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) = \underline{L}^{as} \quad (3.18)$$

Et on a :

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \quad (3.19)$$

3.1.4 Configuration intermédiaire relâchée

En petites déformations, le découplage des déformations élastique et plastique est rendu possible par la partition des déformations :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p \quad (3.20)$$

où $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon}^e$, $\underline{\varepsilon}^p$ représentent respectivement les tenseurs de déformation totale, élastique et plastique.

Pour généraliser ce découplage en transformations finies, on introduit entre les configurations C_0 et C_t une configuration intermédiaire C_p obtenue par déchargement local des contraintes. On a alors le découplage multiplicatif de \underline{F} suivant la relation :

$$\boxed{\underline{F} = \underline{F}^e \underline{F}^p} \quad (3.21)$$

¹ s désigne la partie symétrique du tenseur

² as désigne la partie antisymétrique du tenseur

3.1.5 Additivité des taux de déformation

La dérivation temporelle de (3.21) donne :

$$\dot{\underline{F}} = \dot{\underline{F}}^e \underline{F}^p + \underline{F}^e \dot{\underline{F}}^p \quad (3.22)$$

D'où, d'après (3.16) :

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}}^e [\underline{F}^e]^{-1} + \underline{F}^e \dot{\underline{F}}^p [\underline{F}^p]^{-1} [\underline{F}^e]^{-1} \quad (3.23)$$

Or, on suppose que les déformations élastiques sont petites (hypothèse souvent formulée dans le cas des métaux). Donc $\underline{F}^e \simeq \underline{1}$ et par suite :

$$\underline{F}^e \dot{\underline{F}}^p [\underline{F}^p]^{-1} [\underline{F}^e]^{-1} \simeq \dot{\underline{F}}^p [\underline{F}^p]^{-1} \quad (3.24)$$

Soit finalement :

$$\underline{L} = \underline{L}^e + \underline{L}^p \quad (3.25)$$

Avec :

$$\underline{L}^e = \dot{\underline{F}}^e [\underline{F}^e]^{-1} \quad \text{et} \quad \underline{L}^p = \dot{\underline{F}}^p [\underline{F}^p]^{-1} \quad (3.26)$$

On en déduit alors :

$$\boxed{\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^p} \quad (3.27)$$

Avec

$$\underline{D}^e = [\underline{L}^e]^s \quad \text{et} \quad \underline{D}^p = [\underline{L}^p]^s \quad (3.28)$$

\underline{D}^e et \underline{D}^p sont respectivement les tenseurs des taux de déformations élastique et plastique. On retrouve donc une décomposition additive, comme dans le cas des petites perturbations, mais portant cette fois, non plus sur les déformations, mais sur les taux de déformations.

3.1.6 Tenseurs des contraintes

De la même manière que pour les déformations, on peut définir différents tenseurs pour caractériser l'état de contrainte local du matériau. En suivant les notations introduites Fig. 3.1, le tenseur eulérien de Cauchy est tel que :

$$\vec{dF} = \underline{\sigma} \vec{n} dS_t \quad (3.29)$$

où \vec{dF} est le vecteur force élémentaire s'exerçant sur la surface dS_t .

Si on transporte l'aire dS_t sur la configuration initiale, on obtient par transport de Piola :

$$\vec{n} dS_t = J \underline{F}^{-T} \vec{n}_0 dS_0 \quad (3.30)$$

Ce qui permet d'introduire le tenseur de Boussinesq (ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff) \underline{T} tel que :

$$\vec{dF} = \underline{T} \vec{n}_0 dS_0 \quad \text{et} \quad \underline{T} = J \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \quad (3.31)$$

Ce tenseur n'étant ni lagrangien ni eulérien, puisque caractérisant l'effort élémentaire s'exerçant sur la surface dS_t rapporté à la surface dS_0 , on introduit le second tenseur de Piola-Kirchhoff \underline{S} tel que :

$$\vec{dF} = \underline{F} d\vec{F}_0, \quad d\vec{F}_0 = \underline{S} \vec{n}_0 dS_0 \quad \text{et} \quad \underline{S} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \quad (3.32)$$

où $d\vec{F}_0$ représente le transport convectif de \vec{dF} dans la configuration initiale. Il s'agit donc d'une force élémentaire fictive.

Enfin, dans les lois de comportement intervient souvent le tenseur de Kirchhoff $\underline{\tau}$ relié à $\underline{\sigma}$ par :

$$\underline{\tau} = J \underline{\sigma} \quad (3.33)$$

Dans la pratique, nous utiliserons \underline{T} ou $\underline{\sigma}$ pour formuler les conditions aux limites en description respectivement lagrangienne et eulérienne. \underline{S} et $\underline{\tau}$ pourront servir, quant à eux, dans la formulation des lois de comportement, directement ou sous la forme d'une dérivée objective.

Ayant introduit les éléments de base pour caractériser l'état de déformations et de contraintes d'un solide déformable en transformations finies, il s'agit d'écrire les équations d'équilibre régissant le milieu.

3.2 Equilibre d'un milieu continu

Considérons un solide déformable qui occupe à un instant t un domaine Ω_t , cf. Fig. 3.2.

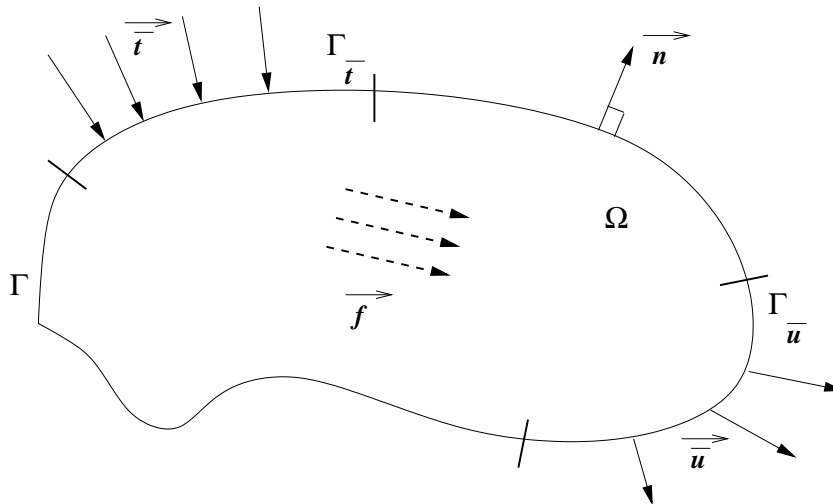


FIG. 3.2 – Conditions aux limites : efforts et déplacements imposés.

Dans le cas général, ce solide peut être soumis à une densité volumique de forces, notée \vec{f} , à une densité surfacique de forces, notée \vec{t} , sur une partie de sa frontière $\Gamma_{\vec{t}}$, et à un déplacement imposé \vec{u} sur une partie de sa frontière $\Gamma_{\vec{u}}$.

Plus concrètement, dans le cas de la mise en forme des métaux, les efforts volumiques sont généralement dus à la force de gravitation. Dans le cas du découpage, ces efforts sont négligeables. Ils sont cependant conservés dans les équations par souci de généralisation. Les forces surfaciques, quant à elles, sont consécutives soit à l'utilisation de serre flan soit à une pression hydraulique.

L'équation locale du mouvement, à laquelle il convient d'ajouter les conditions aux limites et les conditions initiales, s'écrit en description eulérienne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{div} \underline{\sigma} + \rho \vec{f} = \rho \vec{a} & \text{dans } \Omega_t \\ \underline{\sigma} \vec{n} = \vec{t} & \text{sur } \Gamma_{\vec{t}} \\ \vec{u} = \vec{u} & \text{sur } \Gamma_{\vec{u}} \\ \text{à } t = 0, \vec{u} = \vec{u}_0 \text{ et } \vec{v} = \vec{v}_0 & \end{array} \right. \quad (3.34)$$

où \vec{v}_0 et \vec{u}_0 représentent les conditions initiales en vitesse et en déplacement. Dans cette expression, ρ est la masse volumique du solide considéré, \vec{a} est l'accélération du solide et \vec{n} est la normale extérieure à la surface.

De la même façon, on écrit en description lagrangienne les conditions d'équilibre locales :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{div} \underline{T} + \rho_0 \vec{f} = \rho_0 \vec{a} & \text{dans } \Omega_0 \\ \underline{T} \vec{n}_0 = \vec{t} & \text{sur } \Gamma_{\vec{t}} \\ \vec{u} = \vec{u} & \text{sur } \Gamma_{\vec{u}} \\ \text{à } t = 0, \vec{u} = \vec{u}_0 \text{ et } \vec{v} = \vec{v}_0 & \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Les deux systèmes (3.34) et (3.35) sont équivalents, et constituent la formulation forte du problème d'équilibre. C'est à partir de l'une ou l'autre que l'on aboutit à une formulation variationnelle qui, une fois discrétisée en temps et en espace, permettra de calculer la solution du problème. Ces deux discrétisations spatiale et temporelle seront discutées dans le chapitre suivant. Notons que les écritures (3.34) et (3.35) n'ont pas nécessité l'introduction explicite du comportement matériel, elles sont donc tout-à-fait générales.

Remarques

- Le procédé de découpage tel que nous l'envisageons peut être vu comme un procédé quasi-statique. Néanmoins, l'accélération du solide sera conservée dans les équations, car elle interviendra dans le développement des algorithmes d'intégration de type dynamique explicite.
- Il faut noter qu'en revanche la dynamique du système, en particulier les fortes variations d'accélération subies par le système ainsi que les chocs entre la tôle et les outils, engendre des problèmes propres à la dynamique des structures tels que des phénomènes vibratoires entre autres. Ce point n'étant pas l'objet de notre étude, il ne sera pas plus approfondi.
- Notons enfin que négliger les termes inertiels ne signifie pas négliger l'influence de la vitesse sur le comportement matériel. En pratique, les vitesses de déformation en découpage peuvent atteindre 100 s^{-1} , voire 1000 s^{-1} . Si les effets inertiels peuvent

être négligés, la sensibilité du comportement matériel à la vitesse de déformation doit être prise en compte.

3.3 Description du contact et du frottement entre deux solides

Dans la section précédente, le solide était considéré comme isolé, en ce sens qu'il n'interagissait pas avec d'autres solides, déformables ou indéformables. Dans le cas du découpage, la tôle découpée est en contact avec les outils. Ceux-ci seront considérés comme des solides rigides, et il s'agit par conséquent de traiter un problème de contact unilatéral avec ou sans frottement. Nous nous contenterons ici de rappeler les principales relations à respecter pour traiter ce type de problème. La résolution numérique effective sera quant à elle abordée dans le chapitre 4.

Les notations utilisées dans cette section sont indiquées sur la Fig. 3.3.

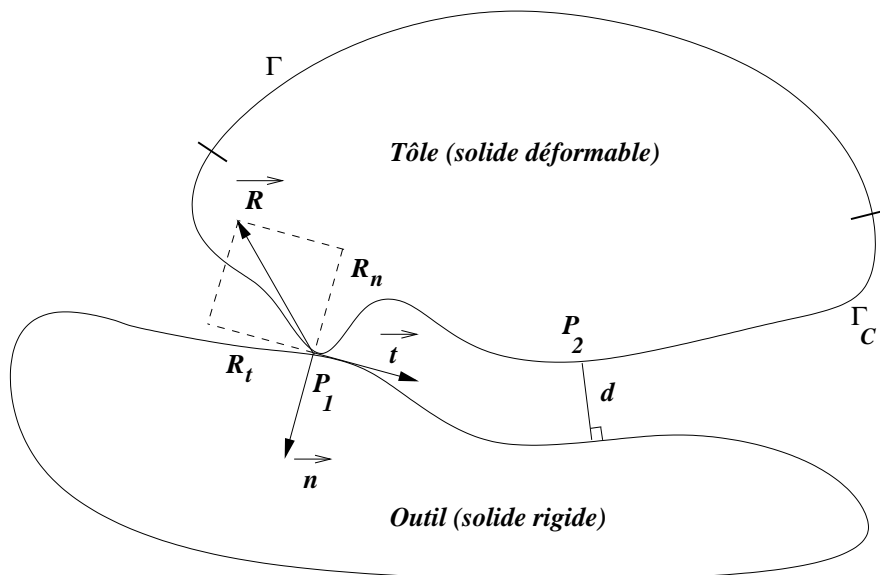


FIG. 3.3 – Description du contact unilatéral entre deux solides.

3.3.1 Contact

On définit un repère local (\vec{n}, \vec{t}) tel que \vec{n} est le vecteur unitaire normal et dirigé vers l'extérieur du solide déformable, et \vec{t} est un vecteur unitaire orthogonal à \vec{n} . $d = d \vec{n}$ représente la distance entre le point P (par exemple, P_1 ou P_2) du solide déformable et le solide rigide. Elle est obtenue par projection orthogonale sur ce dernier.

La condition de non pénétrabilité de la matière stipule que la tôle ne peut pénétrer les outils. Ceci se traduit, d'après les notations de la Fig. 3.3, par :

$$d \leq 0 \quad \forall P \in \Gamma_c \quad (3.36)$$

Γ_c étant la surface du solide déformable susceptible d'entrer en contact avec le solide rigide.

On en déduit que :

- Si $d = 0$ en P , alors le solide déformable est en contact avec le solide rigide au point P (cas du point P_1 , Fig. 3.3). Dans ce cas, si on note R_n la composante normale de la réaction exercée par le solide rigide sur le solide déformable en P ($\vec{R} = R_n \vec{n} + R_t \vec{t}$), on doit avoir :

$$R_n \leq 0 \quad (3.37)$$

En effet, un point du solide déformable ne doit pas adhérer au solide rigide.

- Si $d < 0$, les deux solides ne sont pas en contact (cas du point P_2 , Fig. 3.3) et dans ce cas :

$$R_n = 0 \quad (3.38)$$

Ces deux conditions peuvent se regrouper sous la forme suivante :

$$\boxed{dR_n = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} d \leq 0 \\ R_n \leq 0 \end{cases}} \quad (3.39)$$

Cette dernière relation constitue la forme générale des inégalités fondamentales traduisant les conditions de contact entre un solide déformable et un solide rigide.

Le traitement du contact ne sera pas plus détaillé dans ce chapitre et son étude numérique est différée au chapitre 4.

3.3.2 Frottement

A l'interface entre les solides, nous prendrons une loi de frottement de type Coulomb :

$$|R_t| \leq \mu |R_n| \quad (3.40)$$

où μ est le coefficient de frottement et R_t est la composante tangentielle de l'effort au point P . Plus précisément, cette inégalité se décompose en :

$$\boxed{\begin{cases} |R_t| < \mu |R_n| & \Rightarrow v_t = 0 \\ |R_t| = \mu |R_n| & \Rightarrow R_t = -\mu |R_n| \frac{v_t}{|v_t|} \end{cases}} \quad (3.41)$$

où v_t représente la composante tangentielle de la vitesse au point P ($\vec{v} = v_n \vec{n} + v_t \vec{t}$).

Les sections précédentes ont présenté les équations d'équilibre d'un solide déformable, ainsi que les inégalités intervenant dans le cas du contact unilatéral avec frottement entre un solide déformable et un solide rigide. Il reste à examiner le comportement du matériau. Les différents mécanismes de déformation qui interviennent au cours du découpage sont les suivants :

- Une première phase correspondant à un comportement globalement élastique de la tôle,
- Une seconde phase où le comportement est essentiellement plastique avec ou sans écrouissage suivant le type de matériau,
- A partir d'un certain niveau de pénétration du poinçon, la tôle s'endommage conjointement à l'augmentation de la déformation plastique,

- Cet endommagement progressif se développe dans une bande de cisaillement et conduit à la fissuration de la tôle,
- Enfin, dans une dernière phase la (ou les) fissure(s) se propage(nt) pour conduire à la rupture complète de la tôle.

C'est l'ensemble de ces processus de déformation qu'il importe de modéliser pour traduire le plus fidèlement possible le comportement du matériau. Les sections suivantes présentent la modélisation mécanique retenue dans le cadre de ce travail.

Par souci de clarté dans l'exposé, nous nous limiterons au formalisme en petites perturbations dans la présentation des différents modèles. L'extension aux transformations finies sera exposée à la suite de cette présentation.

3.4 Comportements matériels non endommageants

Dans cette section, on s'intéresse aux mécanismes de la plasticité, qu'elle soit dépendante ou non du temps. Plus précisément, nous nous intéresserons successivement aux comportements élasto-plastique écrouissable, et élasto-visco plastique écrouissable, permettant de simuler la déformation de la tôle dans les deux premières phases de l'opération de découpage. Les mécanismes principaux de déformation sont tout d'abord rappelés. La formulation générale est ensuite présentée, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles.

3.4.1 Mécanismes physiques de la déformation pour les métaux cristallins

Physiquement, l'élasticité, pour les matériaux cristallins, correspond à de faibles variations des distances interatomiques, qui sont pour la plupart réversibles. Au contraire, la plasticité des métaux est liée au mouvement des dislocations dans les grains et engendre des déformations irréversibles. Le mécanisme le plus important de création des dislocations est la source de Franck et Read, qui conduit à l'apparition de boucles de dislocations. Ces dislocations vont se déplacer par glissement des plans cristallographiques les plus favorablement orientés, c'est le mécanisme général de la plasticité, François *et al.* (1995a).

Expérimentalement, on constate fréquemment un durcissement du matériau déformé plastiquement. Celui-ci est essentiellement dû au fait que le nombre de points de blocage des dislocations augmente avec la densité des dislocations, c'est le phénomène d'écrouissage. Une des sources de blocage est le joint de grains. Il en résulte des empilements de dislocations qui vont finir par bloquer la source de dislocations préalablement activée par la déformation. Les concentrations de contrainte qui résultent de ces empilements vont permettre d'activer les sources qui en sont proches et le glissement peut alors se propager de grain en grain, François *et al.* (1995a).

Il est bon de noter que le glissement des dislocations ne modifie pas la structure cristalline. Ceci conduit à poser que le volume reste inchangé en plasticité, ou, ce qui est équivalent, que la plasticité est déviatorique, Lemaître et Chaboche (1985).

La viscoplasticité se distingue de la plasticité par le fait qu'il y a une dépendance par rapport au temps. On distingue généralement deux types de viscoplasticité : à basse température et à haute température. Pour fixer les idées, on considère généralement

comme basse température une température T telle que $T \leq 0.3 T_f$, T_f étant la température de fusion du matériau. Cette limite n'est bien entendu qu'indicative, et dépend du matériau étudié.

La viscoplasticité à basse température correspond aux mouvements des dislocations, en particulier le franchissement des obstacles, facilité par l'activation thermique. Il s'agit d'une déformation plastique thermiquement activée. La diffusion reste lente à ces températures. La viscoplasticité à haute température, quant à elle, fait appel à des phénomènes de diffusion, qui peuvent être transgranulaires ou intergranulaires, François *et al.* (1995b). Ces mécanismes sont liés aux glissements intercrystallins que l'on observe généralement à haute température. En effet, les déformations plastiques engendrent des contraintes intergranulaires, dues au fait que les grains doivent rester en contact tant qu'il n'y a pas d'endommagement intergranulaire. Ces contraintes peuvent être en partie relaxées à haute température par un glissement intergranulaire, rendu possible par la diffusion de matière. Enfin, dans le domaine de la viscoplasticité à haute température, on peut rencontrer des mécanismes de restauration. En particulier, pour des vitesses de déformations élevées (de 1 s^{-1} à 100 s^{-1} , François *et al.* (1995b)), on peut observer pour certains matériaux un mécanisme de recristallisation dynamique. Conjointement à l'écroutissage du matériau, une recristallisation partielle est alors possible.

3.4.2 Élasto-plasticité avec écroutissage

Ayant rappelé brièvement les principaux mécanismes de la plasticité, il importe de mettre en place les modèles mécaniques traduisant ces mécanismes. Nous nous placerons pour cela dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles.

Choix des variables d'état

Il faut d'abord définir les variables d'état, c'est-à-dire les variables observables et les variables internes.

Les variables d'état observables sont ici la déformation totale $\underline{\varepsilon}$ et la température T .

Pour les variables internes, on introduit tout d'abord la déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ et la déformation élastique $\underline{\varepsilon}^e$, liées à la déformation totale par l'hypothèse de partition des déformations (3.20).

Nous supposons dans ce travail que l'écroutissage est purement isotrope. Il convient donc d'ajouter une nouvelle variable interne scalaire représentative de cet écroutissage. La variable choisie est la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}^p$. Rappelons la définition de cette grandeur :

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\varepsilon}}^p : \dot{\underline{\varepsilon}}^p \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (3.42)$$

Fonction de charge

Il existe dans l'espace des contraintes un seuil à partir duquel l'écoulement plastique a lieu. Il est défini par l'introduction d'une fonction seuil f_p telle que :

$$f_p = f_p(\underline{\sigma}, R) \quad (3.43)$$

où R est la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage du matériau.

Les valeurs prises par f_p indiquent si le matériau a un comportement élastique ou si un écoulement plastique a lieu. La situation est alors la suivante :

$$\begin{cases} f_p < 0 & \text{ou} & (f_p = 0 \text{ et } \dot{f}_p < 0) & \text{charge ou décharge élastique} \\ f_p = 0 & \text{et} & \dot{f}_p = 0 & \text{écoulement plastique} \end{cases} \quad (3.44)$$

Notons qu'en plasticité, $f_p > 0$ est impossible, ce qui implique que le point représentatif de l'état de contraintes est astreint à rester sur la surface de charge (ou surface d'écoulement) définie par $f_p = 0$.

Il s'agit maintenant de préciser les lois de comportement du matériau élasto-plastique écrouissable.

Potentiel thermodynamique

Le potentiel thermodynamique choisi est l'énergie libre spécifique ψ . Celui-ci est pris sous la forme suivante :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}^e, T, \bar{\varepsilon}^p) \quad (3.45)$$

Nous supposons également qu'il y a découplage entre le comportement élastique et l'écrouissage, ce qui permet d'écrire :

$$\psi = \psi^e(\underline{\varepsilon}^e, T) + \psi^p(T, \bar{\varepsilon}^p) \quad (3.46)$$

Et on en déduit (Lemaître et Chaboche, 1985) :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \underline{\varepsilon}^e} \quad \text{et} \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (3.47)$$

ainsi que

$$R = \rho \frac{\partial \psi^p}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \quad (3.48)$$

Ce qui montre que le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$ et l'entropie s sont respectivement les forces thermodynamiques associées à $\underline{\varepsilon}^e$ et T . La variable scalaire R est la force thermodynamique associée à $\bar{\varepsilon}^p$. ρ est la masse volumique du matériau.

Les relations (3.47) et (3.48) constituent les lois d'état. Il reste à écrire les lois complémentaires, qui vont définir l'évolution des variables internes en fonction des forces thermodynamiques qui leur sont associées. Pour cela, le potentiel de dissipation est introduit à partir du second principe de la thermodynamique.

Potentiel de dissipation

La dissipation intrinsèque volumique φ_1 est ici définie par

$$\varphi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p - R \dot{\bar{\varepsilon}}^p \quad (3.49)$$

Et la dissipation thermique φ_2 s'écrit par ailleurs :

$$\varphi_2 = -\frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\text{grad}} T \quad (3.50)$$

où \vec{q} est le vecteur flux de chaleur.

Si on suppose le découplage entre les dissipations intrinsèque et thermique, l'inégalité de Clausius-Duhem implique en particulier :

$$\varphi_1 \geq 0 \quad (3.51)$$

Pour satisfaire cette condition, il est suffisant d'introduire un potentiel ϕ convexe, positif, et nul à l'origine (Lemaître et Chaboche, 1985). Ce potentiel est appelé potentiel de dissipation. On a alors :

$$\phi = \phi(\underline{\dot{\varepsilon}}^p, \dot{\varepsilon}^p; \bar{\varepsilon}^p, T) \quad (3.52)$$

Dans cette expression, la température et la variable interne représentant l'état d'écrouissage pourront éventuellement intervenir, comme paramètres.

On se place dans le cadre des matériaux standards généralisés. Par conséquent, la règle de normalité implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^p} \\ R = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}^p} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

En utilisant la transformée de Legendre Fenchel de ϕ , on définit le potentiel F dual de ϕ :

$$F = F(\underline{\sigma}, R; \bar{\varepsilon}^p, T) \quad (3.54)$$

On montre que la règle de normalité est conservée et par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \\ \dot{\varepsilon}^p = -\frac{\partial F}{\partial R} \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Ces deux dernières relations définissent les lois d'évolution des variables flux (ou lois complémentaires). Cependant, en plasticité, ce ne sont pas directement ces lois que l'on utilise, comme explicité dans le paragraphe suivant.

Principe du travail maximal

Lorsque le comportement du matériau est indépendant du temps, comme c'est le cas en plasticité, la fonction ϕ est positivement homogène d'ordre un³ (Lemaître et Chaboche, 1985). Par suite, les fonctions ϕ et F ne sont pas différentiables.

Or, le principe du travail maximal, introduit par Hill en 1950, stipule que l'état de contraintes lié à un écoulement plastique donné est tel que la dissipation plastique est maximale. Ce principe s'écrit donc dans notre cas (Simo et Hughes, 1998) :

$$\varphi_1(\underline{\sigma}, R, \underline{\dot{\varepsilon}}^p, \dot{\varepsilon}^p) = \max_{(\underline{\sigma}^*, R^*) \in E_{\underline{\sigma}}} \{ \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - R^* \dot{\varepsilon}^p \} \quad (3.56)$$

³c'est-à-dire : $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \phi(\alpha \underline{\dot{\varepsilon}}^p) = |\alpha| \phi(\underline{\dot{\varepsilon}}^p)$

où $\{\underline{\sigma}, R\}$ est l'état de contraintes réel recherché. Le domaine $E_{\underline{\sigma}}$ représente les limites du domaine d'élasticité, c'est-à-dire l'ensemble des états de contraintes admissibles :

$$E_{\underline{\sigma}} = \{(\underline{\sigma}^*, R^*) / f_p(\underline{\sigma}^*, R^*) \leq 0\} \quad (3.57)$$

La recherche de la fonction $-\varphi_1$ sous la condition $f_p \leq 0$ est donc un problème de minimisation sous contraintes. On peut alors introduire une fonction \mathfrak{L} telle que :

$$\mathfrak{L} = -\underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\varepsilon}}^p + R^* \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \dot{\lambda} f_p \quad (3.58)$$

où $\dot{\lambda}$ est un multiplicateur de Lagrange introduit pour satisfaire la condition d'annulation de la fonction de charge. Notons que l'on se place ici dans le cadre de la plasticité associée, ce qui signifie que c'est directement la fonction f_p qui intervient dans \mathfrak{L} .

La résolution de ce problème conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \underline{\sigma}} = -\underline{\dot{\varepsilon}}^p + \dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R} = \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial R} = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\lambda}} = f_p = 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

Ainsi les relations (3.55)₁, (3.55)₂ sont à remplacer dans le cadre de la plasticité associée par :

$$\boxed{\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{et} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^p = -\dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial R}} \quad (3.60)$$

On donne à $\dot{\lambda}$ le nom de multiplicateur instantané de plasticité.

La vitesse de déformation est donc déterminée en plasticité à un scalaire multiplicatif $\dot{\lambda}$ près. Pour le calculer, il est possible d'utiliser la condition $\dot{f}_p = 0$, dite condition de consistance. On obtient :

$$\dot{f}_p = \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f_p}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad (3.61)$$

Les relations (3.48) et (3.60)₂ impliquent que :

$$\dot{R} = \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial^2 \bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = -\dot{\lambda} \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial^2 \bar{\varepsilon}^p} \frac{\partial f_p}{\partial R} \quad (3.62)$$

D'où, avec (3.61) :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}}}{\rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial^2 \bar{\varepsilon}^p} \frac{\partial f_p}{\partial R}} \quad (3.63)$$

La donnée des deux fonctions ψ et f_p suffit donc à caractériser complètement le comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope. Le paragraphe suivant précise les lois retenues dans ces travaux.

Particularisation du comportement

Nous nous limitons dans cette section au cas isotherme, ce qui conduit à négliger tous les termes relatifs à la variable interne T .

La relation (3.47)₁ nécessite la donnée de ψ^e . Il est possible de choisir une forme quadratique définie positive pour ce potentiel, ce qui s'exprime par :

$$\psi^e = \frac{1}{2\rho} \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (3.64)$$

où $\underline{\underline{C}}^e$ est le tenseur d'élasticité du quatrième ordre.
(3.47)₁ devient donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (3.65)$$

On se place par ailleurs dans le cadre d'une théorie élastique linéaire isotrope. L'expression de $\underline{\underline{C}}^e$ prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{C}}^e = K \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2G \left(\underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) \quad (3.66)$$

Dans cette expression, $\underline{\underline{1}}$ et $\underline{\underline{I}}$ représentent respectivement le tenseur identité d'ordre deux et le tenseur identité d'ordre quatre. K et G sont les modules de compressibilité et de cisaillement, respectivement.

De plus, la relation (3.48) utilise le potentiel ψ^p , ou plutôt sa dérivée partielle relativement à $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. En fait, cette relation s'identifie à la loi d'écrouissage (à un facteur ρ près). Son expression sera donc précisée en fonction de la loi retenue. Celle-ci peut par exemple prendre la forme suivante :

$$R = k(\underline{\underline{\varepsilon}}^p)^n \quad (3.67)$$

où k , n , sont deux paramètres matériau.

Pour caractériser l'écoulement du matériau, nous utiliserons le critère de plasticité de von Mises défini comme suit :

$$f_p(\sigma_{eq}, R) = \sigma_{eq} - R - \sigma_y = 0 \quad (3.68)$$

où σ_y est la limite élastique initiale du matériau et σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de von Mises :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad (3.69)$$

avec $\underline{\underline{s}}$ le déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$.

On peut également définir la contrainte limite d'écoulement σ_0 définissant la taille actuelle du domaine élastique par $\sigma_0 = R + \sigma_y$, de sorte que le critère de von Mises s'écrit :

$$f_p(\sigma_{eq}, R) = \sigma_{eq} - \sigma_0 = 0 \quad (3.70)$$

En utilisant (3.68) pour expliciter (3.60)₁ et (3.60)₂, on aboutit finalement à :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\dot{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda} \underline{n} \\ \text{avec } \underline{n} &= \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{\sigma_{eq}} \\ \dot{\varepsilon}^p &= \dot{\lambda} \end{aligned}} \quad (3.71)$$

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement élasto-viscoplastique, en insistant surtout sur les différences de modélisation avec le modèle élasto-plastique.

3.4.3 Élasto-viscoplasticité

Par rapport au cas de la plasticité, la viscoplasticité constitue un cas plus général. En effet, la plasticité peut être vue comme un cas limite de la viscoplasticité correspondant soit à des vitesses de déformation infiniment lentes, soit à des vitesses de déformation infiniment rapides. La formulation thermodynamique des deux approches est donc très similaire.

Choix des variables d'état

La différence principale avec le cas de la plasticité indépendante du temps réside dans le fait que cette fois des mécanismes de restauration peuvent se produire. La variable interne représentant l'état d'écrouissage, croissante dans le cas général, peut alors diminuer au cours du processus de déformation.

Les variables internes utilisées sont le tenseur des déformations viscoplastiques $\underline{\varepsilon}^{vp}$, et une variable scalaire représentant l'écrouissage isotrope du matériau, notée α . Les variables observables sont les mêmes que pour la plasticité indépendante du temps. Notons que l'effet de la température n'est plus négligé comme dans le cas élasto-plastique. Ceci traduit le fait que la sensibilité du comportement matériel à la vitesse de déformation s'accompagne en général d'une sensibilité à la température.

Seuil d'élasticité

On considère toujours un critère du type $f_{vp} = 0$ pour caractériser l'écoulement viscoplastique. Cependant, et c'est une des différences majeures avec l'élasto-plasticité, le point représentatif de l'état de contraintes n'est plus astreint à rester sur la surface de charge. En d'autres termes, en viscoplasticité, $f_{vp} > 0$ est possible. Cela signifie en particulier que la notion de surface de charge au sens strict disparaît en viscoplasticité, et l'on n'a donc plus qu'un seuil d'élasticité initial défini par $f_{vp} = 0$. Le critère se résume donc dans ce cas à :

$$\begin{cases} f_{vp} \leq 0 & \text{charge ou décharge élastique} \\ f_{vp} > 0 & \text{écoulement viscoplastique} \end{cases} \quad (3.72)$$

Potentiel thermodynamique

Les développements précédents restent ici valables. Les relations (3.47) sont donc inchangées et (3.48) est à remplacer par :

$$R = \rho \frac{\partial \psi^{vp}}{\partial \alpha} \quad (3.73)$$

où ψ^{vp} remplace ψ^p dans la formulation précédente.

Potentiel de dissipation

Le potentiel F peut s'écrire sous la forme :

$$F = F_{vp}(\underline{\sigma}, R; \alpha, T) + F_r(R; \alpha, T) \quad (3.74)$$

où F_{vp} représente le potentiel viscoplastique, et F_r le potentiel de restauration.

On a alors :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F_{vp}}{\partial \underline{\sigma}} \\ \dot{\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial R} = -\frac{\partial F_{vp}}{\partial R} - \frac{\partial F_r}{\partial R} \end{cases} \quad (3.75)$$

Dans le cas viscoplastique, le problème de la différentiabilité de la fonction F ne se pose pas. Il est donc possible de préciser l'allure des lois d'évolution à partir des relations précédentes.

L'hypothèse d'isotropie implique que F_{vp} est une fonction des invariants de $\underline{\sigma}$ ⁴.

Par ailleurs, l'hypothèse d'incompressibilité conduit à ne faire intervenir que les invariants J_2 et J_3 . Enfin, l'influence du troisième invariant J_3 est souvent négligée, nous ne considérerons donc que l'influence de $J_2(\underline{\sigma}) = \sigma_{eq}$.

Ainsi, F_{vp} s'écrit :

$$F_{vp} = F_{vp}(\sigma_{eq}, R; \alpha, T) \quad (3.76)$$

Enfin, on suppose que F_{vp} s'exprime à partir de la dimension du domaine d'élasticité, ce qui conduit finalement à :

$$F_{vp} = F_{vp}(\sigma_{eq} - R - \sigma_y; \alpha, T) \quad (3.77)$$

Des relations (3.75)₁, (3.75)₂ et (3.77), on en déduit :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial F_{vp}}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F_{vp}}{\partial \sigma_{eq}} \underline{n} \\ \dot{\alpha} = \frac{\partial F_{vp}}{\partial \sigma_{eq}} - \frac{\partial F_r}{\partial R} \end{cases} \quad (3.78)$$

Par ailleurs, si on calcule la vitesse de déformation plastique équivalente, on obtient, à l'aide de (3.78)₁ :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} : \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial F_{vp}}{\partial \sigma_{eq}} \quad (3.79)$$

⁴Les invariants choisis ici (on peut en définir d'autres) sont : $J_1(\underline{\sigma}) = tr(\underline{\sigma})$; $J_2(\underline{\sigma}) = \left(\frac{3}{2} tr(\underline{\sigma}^2)\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{eq}$; $J_3(\underline{\sigma}) = \left(\frac{9}{2} tr(\underline{\sigma}^3)\right)^{\frac{1}{3}}$

Ce qui implique :

$$\dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}^{vp} - \frac{\partial F_r}{\partial R} \quad (3.80)$$

Ce qui montre que, si les effets de restauration sont négligés, α s'identifie bien avec $\bar{\varepsilon}^{vp}$.

La donnée des deux potentiels ψ^{vp} et F suffit donc à caractériser complètement le comportement élasto-viscoplastique du matériau.

Particularisation du comportement

Le potentiel thermodynamique élastique ψ^e est toujours donné par l'équation (3.64).

La donnée de la loi d'écrouissage fournit, comme précédemment, l'expression de la dérivée partielle du potentiel thermodynamique viscoplastique ψ^{vp} . Comme nous l'avons indiqué précédemment, l'influence de la température n'est plus négligée dans cette section. Pour prendre en compte ce paramètre, on peut par exemple écrire la contrainte d'écoulement R sous la forme (Picart, 1986) :

$$R = k\alpha^n \left[\exp \left(\frac{\Delta H}{\eta T} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (3.81)$$

où p est un coefficient de sensibilité à la température. Le coefficient $\frac{\Delta H}{\eta}$ est un coefficient dépendant du matériau. Il faut noter que cette expression est valable pour de faibles variations de température.

Par ailleurs, il n'est pas envisagé ici de couplage thermomécanique complet. Pour déterminer l'échauffement adiabatique dû à la dissipation mécanique, on utilise une approximation de l'équation de la chaleur sous la forme :

$$\rho C_v \dot{T} = \xi \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} \quad (3.82)$$

où ρ est la masse volumique, C_v la chaleur massique à volume constant, et ξ un coefficient compris entre 0 et 1 exprimant le fait que toute la dissipation mécanique n'est pas convertie en chaleur. Ici, ξ est pris égal à 0.9.

Concernant le potentiel de dissipation, F_{vp} est pris sous la forme suivante⁵ (Picart, 1986) :

$$F_{vp} = \gamma \frac{R}{m+1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - \sigma_y}{R} \right\rangle^{m+1} \quad (3.83)$$

m est un coefficient de sensibilité à la vitesse et γ est un coefficient de fluidité.

Par ailleurs, on peut choisir pour expression du potentiel de restauration F_r (Lemaître et Chaboche, 1985) :

$$F_r = \frac{A}{a+1} \left(\frac{R}{A} \right)^{a+1} \quad (3.84)$$

où A et a sont des constantes intrinsèques au matériau.

⁵ $\langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2}$

Par conséquent, en explicitant les relations (3.78) et (3.79) avec (3.81), (3.83) et (3.84), on obtient :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} = \gamma \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - \sigma_y}{R} \right\rangle^m \quad (3.85)$$

et :

$$\dot{\alpha} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} - \left(\frac{R}{A} \right)^a \quad (3.86)$$

$$\underline{\dot{\bar{\varepsilon}}}^{vp} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} \underline{n} \quad (3.87)$$

Si, à partir de (3.85), on exprime σ_{eq} , on aboutit à :

$$\sigma_{eq} = \sigma_y + R \left(1 + \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (3.88)$$

En réinjectant (3.81) dans l'expression précédente et en identifiant α et $\bar{\varepsilon}^{vp}$:

$$\sigma_{eq} = \sigma_y + k (\bar{\varepsilon}^{vp})^n \left[\exp \left(\frac{\Delta H}{\eta T} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \left(1 + \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (3.89)$$

Cette dernière relation constitue une loi d'écrouissage viscosité complète, avec prise en compte des effets thermiques.

L'équation (3.88) peut par ailleurs se réécrire sous la forme :

$$\tilde{f}_{vp} = \sigma_{eq} - \sigma_y - R \left(1 + \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) = 0 \quad (3.90)$$

Dans le cas de l'élasto-viscoplasticité, nous avons donc $\tilde{f}_{vp} = 0$, tandis que f_{vp} , définie par $f_{vp} = \sigma_{eq} - R - \sigma_y$ est telle que : $f_{vp} > 0$. La surface $\tilde{f}_{vp} = 0$ peut s'interpréter comme un potentiel viscoplastique, ou plus précisément comme une surface équipotentielle. Enfin, il est clair que la vitesse de déformation viscoplastique n'est pas ici définie à un scalaire multiplicatif près, puisque la vitesse de déformation viscoplastique équivalente est déterminée explicitement par (3.85).

Le chapitre 4 précisera comment il est possible de construire une intégration numérique de ces relations nécessitant peu d'aménagements par rapport au cas de la plasticité indépendante du temps.

3.5 Modèles d'endommagement

Les lois (élasto-)plastiques ou (élasto-)viscoplastiques décrites précédemment vont permettre de simuler le comportement du matériau découpé dans les deux premières phases de la déformation, c'est-à-dire lorsque la tôle n'est pas encore endommagée. Avant l'amorçage d'une fissure macroscopique dans la tôle, celle-ci va s'endommager progressivement. Si on veut simuler de manière réaliste le comportement, il convient donc de modéliser cet endommagement progressif. Physiquement, l'endommagement affecte les propriétés mécaniques du matériau, ce qui signifie que sa prise en compte conduira à une approche dite couplée,

c'est-à-dire dans laquelle les propriétés mécaniques de la tôle découpée évolueront avec l'endommagement. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre bibliographique de ce mémoire, une part importante des travaux effectués en découpage ne modélisent pas un tel couplage. Nous reviendrons plus précisément sur cette approche, dite non couplée, dans l'analyse de la phase suivante du découpage, à savoir l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Après avoir rappelé brièvement dans la sous-section suivante les mécanismes physiques de l'endommagement, la modélisation retenue dans nos travaux sera détaillée.

3.5.1 Mécanismes physiques d'endommagement

On peut classer les principaux types d'endommagement comme suit (Habracken, 2001; Lemaître et Chaboche, 1985) :

- L'endommagement fragile apparaît sans qu'il y ait eu nécessairement des déformations plastiques importantes. Il met en jeu des ruptures de liaisons interatomiques. On le rencontre par exemple dans le cas du béton (Lemaître et Chaboche, 1985).
- L'endommagement de fatigue se rencontre quant à lui sur des composants soumis à un nombre important de cycles de fonctionnement. Ce type d'endommagement n'entre donc pas dans le cadre de ces travaux.
- L'endommagement de fluage, ou endommagement viscoplastique fragile, met en jeu des décohésions intergranulaires. Il est surtout observé pour des températures élevées.
- L'endommagement plastique ductile survient consécutivement à de grandes déformations irréversibles de la structure cristalline.

C'est plutôt ce dernier type d'endommagement que l'on retrouve en découpage, bien que l'on observe généralement une rupture mélangeant fragilité et ductilité. La rupture microscopique intervient au niveau des défauts du polycristal. Ces défauts peuvent être par exemple des particules d'éléments d'addition dans les alliages, des inclusions, ou encore des précipités de mise en solution. Comme le défaut est en règle générale moins ductile que la matrice, la rupture microscopique se produira soit par clivage du défaut, soit par décohésion à l'interface entre la matrice et ce défaut. C'est ce que l'on appelle l'amorçage (ou nucléation) des cavités, il correspond au premier stade de l'endommagement ductile. Le second stade est la croissance de ces cavités, qui résulte des déformations plastiques subies par la matrice. Le stade ultime est la coalescence, dans laquelle les cavités se rejoignent pour former une fissure macroscopique qui conduira à la rupture de la structure.

Il existe un grand nombre de modèles ayant pour objet de représenter un tel comportement. Nous retiendrons dans ce mémoire deux modèles, fondés sur des approches différentes. Le choix de ces deux modèles repose sur le fait que ce sont ceux qui, dans leur forme la plus générale, sont les plus utilisés en découpage des métaux. Par ailleurs, le fait qu'il existe certaines divergences quant à l'utilisation de l'un ou l'autre de ces modèles en découpage (voir le chapitre bibliographique) nous conduit à développer les deux en vue de les confronter à expérience. Les deux modélisations retenues sont présentées dans les sous-sections suivantes.

3.5.2 Modèle d'endommagement de type Lemaître

Cette théorie s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Elle a été initiée par les travaux de Kachanov en 1958, puis de Rabotnov. Le modèle présenté ci-après repose sur deux notions importantes : celle de la contrainte effective et celle de l'équivalence en déformation. Avant d'aborder ces deux points, introduisons tout d'abord la variable interne caractérisant l'endommagement.

Variable d'endommagement

On se place dans une hypothèse d'endommagement isotrope. La variable interne caractérisant l'état d'endommagement sera donc une variable scalaire. On note S l'aire totale d'un élément de volume (cf. Fig. 3.4), \tilde{S} l'aire résistante effective, c'est-à-dire corrigée des défauts engendrés par les fissures et les cavités, et S_D l'aire de ces défauts.

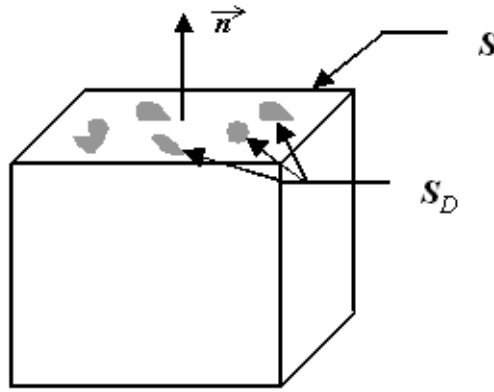


FIG. 3.4 – Élément de volume endommagé (d'après Lemaître et Chaboche (1985)).

On a donc :

$$S_D = S - \tilde{S} \quad (3.91)$$

On pose :

$$D = \frac{S_D}{S} \quad (3.92)$$

D représente une mesure de l'endommagement local. $D = 0$ pour un élément de volume non endommagé, $0 < D < 1$ lorsque l'endommagement se développe dans l'élément de volume et $D = 1$ pour un élément de volume rompu. En réalité, la rupture survient avant $D = 1$ et on écrit plutôt $D = D_C$, D_C étant un paramètre à déterminer expérimentalement.

La variable interne d'endommagement étant définie, il faut introduire les deux notions évoquées précédemment.

Notion de contrainte effective

Ce concept a été introduit par Rabotnov. On définit la contrainte effective comme étant la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. On note $\tilde{\sigma}$ la contrainte effective et on a alors par définition, dans le cas unidimensionnel :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (3.93)$$

ce qui s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} \quad (3.94)$$

et d'après les relations (3.91) et (3.92) :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.95)$$

Si l'élément est non endommagé, on retrouve $\tilde{\sigma} = \sigma$. Si en revanche l'élément est rompu, on obtient $\tilde{\sigma} = \infty$.

Dans le cas isotrope, la relation précédente se généralise au cas tridimensionnel par la relation :

$$\boxed{\tilde{\underline{\sigma}} = \frac{\underline{\sigma}}{1 - D}} \quad (3.96)$$

Principe d'équivalence en déformation

Ce principe s'énonce de la façon suivante, Lemaître et Chaboche (1985) : 'Tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective.'

Ce principe signifie donc que l'on peut remplacer le matériau réel endommagé par un matériau fictif sain, sur lequel on applique la contrainte effective à la place de la contrainte réelle. L'état de déformation de ces deux matériaux sera le même. Autrement dit, ce principe associé à la notion de contrainte effective permet de continuer à utiliser les concepts propres à la mécanique des milieux continus en travaillant sur le matériau sain équivalent.

À l'aide de ces deux notions, il est possible de décrire la formulation thermodynamique d'un tel modèle.

Potentiel thermodynamique

On se place dans le cas où le matériau présente un comportement élasto-plastique écrouissable ou élasto-viscoplastique écrouissable. On note α les variables internes autres que la variable d'endommagement. α est ici une variable scalaire unique représentant l'état d'écrouissage du matériau.

Le potentiel énergie libre est une fonction convexe des variables d'état, et plus particulièrement de la variable d'endommagement D . On considère qu'il s'écrit sous la forme suivante⁶ :

⁶in signifie inélastique

$$\psi = \psi^e(\underline{\varepsilon}^e, T, D) + \psi^{in}(T, \alpha) \quad (3.97)$$

Les relations (3.47) et (3.48) restent valables (avec α remplaçant $\bar{\varepsilon}^p$).

En notant Y la force thermodynamique associée à D , on ajoute une relation :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi^e}{\partial D} \quad (3.98)$$

Potentiel de dissipation

Le second principe impose que la dissipation intrinsèque soit positive. Soit ici :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - R\dot{\alpha} - Y\dot{D} \geq 0 \quad (3.99)$$

Les phénomènes de plasticité ou viscoplasticité pouvant intervenir indépendamment de l'endommagement (l'inverse étant également vrai), on peut scinder cette inégalité en :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - R\dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.100)$$

et

$$-Y\dot{D} \geq 0 \quad (3.101)$$

La deuxième relation montre que, comme $-Y$ est une forme quadratique définie positive, on doit avoir nécessairement $\dot{D} \geq 0$. L'endommagement ne peut donc pas diminuer.

Comme dans le cas du comportement non endommageant, on introduit le potentiel F duquel dérivent les lois complémentaires. Le modèle de Lemaître suppose que la dissipation plastique est découplée de la dissipation par endommagement. Par conséquent, le potentiel F se met sous la forme :

$$F = F_{in}(\underline{\sigma}, R; \alpha, T, D) + F_D(Y; D) \quad (3.102)$$

Il reste à particulariser les relations précédentes dans les cas de l'élasto-plasticité et de l'élasto-viscoplasticité.

Particularisation du comportement

Si on n'envisage pas d'influence de la température sur l'élasticité, le potentiel ψ^e est généralement pris sous la forme :

$$\psi^e = \frac{1}{2\rho} (1 - D) \underline{\underline{C}}^e : \underline{\varepsilon}^e : \underline{\varepsilon}^e \quad (3.103)$$

On obtient donc :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \frac{\underline{\sigma}}{1 - D} = \underline{\underline{C}}^e : \underline{\varepsilon}^e \quad (3.104)$$

$$Y = -\frac{1}{2} \underline{\underline{C}}^e : \underline{\varepsilon}^e : \underline{\varepsilon}^e \quad (3.105)$$

$-Y$ prend le nom de taux de restitution d'énergie élastique. On montre en effet que cette quantité s'identifie, au signe près, avec la moitié de la variation d'énergie élastique engendrée par une variation d'endommagement à contrainte et température constantes.

• Dans le cas du comportement indépendant du temps, on a $F_{in} = f_p$, avec la fonction de charge f_p prise sous la forme :

$$f_p(\underline{\sigma}, R, D) = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - R - \sigma_y \quad (3.106)$$

Le potentiel d'endommagement est choisi quant à lui tel que :

$$F_D = \frac{S_0}{s_0 + 1} \frac{1}{1-D} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0+1} \quad (3.107)$$

où S_0 et s_0 sont des paramètres matériaux.

L'évolution des variables internes est donnée par :

$$\boxed{\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial R}} \quad (3.108)$$

et

$$\boxed{\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y}} \quad (3.109)$$

Soit, en utilisant les expressions (3.106) et (3.107) :

$$\boxed{\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \underline{n} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = \dot{\lambda}} \quad (3.110)$$

et

$$\boxed{\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0}} \quad (3.111)$$

Si par ailleurs, on calcule $\dot{\underline{\varepsilon}}^p$, on obtient, d'après (3.110) :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} = \frac{\dot{\alpha}}{1-D} \quad (3.112)$$

La vitesse d'évolution de l'endommagement est donc reliée à la vitesse de déformation plastique équivalente par :

$$\dot{D} = \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.113)$$

En se rappelant que Y peut être obtenue par un calcul de l'énergie élastique dissipée, on peut écrire Y sous la forme :

$$-Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (3.114)$$

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. σ_m est la contrainte hydrostatique définie par $\sigma_m = \frac{\sigma : \underline{1}}{3}$. Le rapport $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$ est appelé le taux de triaxialité.

• Si le comportement est dépendant du temps, on généralise les notions vues dans le cas non endommageant, en utilisant la notion de contrainte effective. En particulier, les termes σ_{eq} sont à remplacer par $\frac{\sigma_{eq}}{1-D}$. On obtient, en ne tenant pas compte des termes de restauration, les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \\ \dot{\tilde{\epsilon}}^{vp} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \\ \dot{\underline{\tilde{\epsilon}}}^{vp} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \underline{n} \end{cases} \quad (3.115)$$

Avec :

$$\dot{\lambda} = \gamma \left\langle \frac{\frac{\sigma_{eq}}{1-D} - R - \sigma_y}{R} \right\rangle^m \quad (3.116)$$

Pour des raisons de simplicité, la même notation que dans le cas élasto-plastique a été utilisée pour $\dot{\lambda}$. Cependant, ici, $\dot{\lambda}$ est explicitement défini.

Dans le cas où il y a une dépendance par rapport au temps, la fonction :

$$\tilde{f}_{vp} = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - \sigma_y - R \left(1 + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) = 0 \quad (3.117)$$

peut, comme dans la section précédente, s'interpréter comme un potentiel viscoplastique.

Le deuxième modèle très largement utilisé en découpage est le modèle de Gurson, dans sa version modifiée par Tvergaard et Needleman.

3.5.3 Modèle d'endommagement de type Gurson

Introduction

Ce modèle est d'une inspiration très différente du précédent. Il est fondé sur une analyse du comportement microscopique du matériau. Schématiquement, on se place à l'échelle de la cavité et on calcule l'évolution (c'est-à-dire en particulier la croissance) d'une cavité (ou vide). Les résultats calculés au niveau microscopique sont ensuite transférés au niveau macroscopique⁷ par homogénéisation. Bien entendu, ce type d'analyse suppose des hypothèses simplificatrices plus ou moins fortes sur le milieu considéré afin d'être capable de calculer une solution analytique.

Les hypothèses initiales introduites par Gurson (1977) sont les suivantes :

- analyse d'un vide sphérique au centre d'une matrice métallique également sphérique,

⁷Passage dit 'passage micro-macro'

- comportement rigide parfaitement plastique de la matrice,
- chargement axisymétrique

En fait, Chambert (2001) indique que l'on peut s'affranchir de la troisième hypothèse (chargement axisymétrique). Ce modèle a été étendu, comme nous le verrons par la suite, au cas de matériaux écrouissables sensibles ou non à la vitesse de déformation. Les restrictions de la deuxième hypothèse peuvent éventuellement être levées.

Les détails donnés sur ce modèle se limitent aux résultats homogénéisés au niveau macroscopique. Il ne sera pas fait mention des calculs microscopiques et des techniques d'homogénéisation qui ont conduit à ces résultats. De nombreuses informations sur ces points sont disponibles dans les références Gurson (1977), Tvergaard (1990), Chambert (2001).

Caractérisation de l'endommagement

On considère un matériau poreux ductile composé d'une matrice métallique incompressible et d'un certain nombre de cavités. On considère un volume élémentaire représentatif (VER) suffisamment grand par rapport aux hétérogénéités de la matière pour que le problème d'échantillonnage ne se pose pas. De plus, il faut que les dimensions du VER soit telles que l'on puisse continuer à utiliser les outils de la mécanique des milieux continus. On peut alors modéliser le milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent dans lequel les grandeurs macroscopiques sont les moyennes des champs microscopiques.

Les volumes V , V_{mat} et V_{tot} représentent respectivement le volume des vides, le volume de la matrice (sans vide) et le volume total du VER (cf. Fig. 3.5).

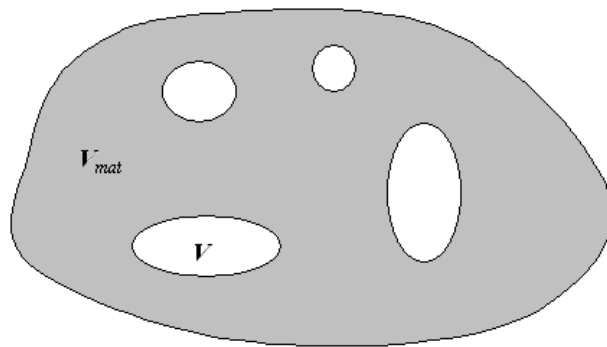


FIG. 3.5 – VER pour un matériau ductile poreux (d'après Chambert (2001)).

On introduit alors une variable scalaire, notée f , qui caractérise l'endommagement isotrope du matériau. f est définie comme étant la fraction volumique de vides, soit :

$$f = \frac{V}{V_{tot}} = \frac{V_{tot} - V_{mat}}{V_{tot}} \quad (3.118)$$

Fonction de charge

Avec les hypothèses précédemment évoquées, Gurson propose une expression de la fonction de charge ⁸ :

⁸La notation f_p pour la fonction de charge est ici abandonnée pour des raisons évidentes de clarté en regard de f .

$$\Phi(\underline{\sigma}, \sigma_y, f) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_y^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (3.119)$$

On peut remarquer que ce critère se réduit à celui de von Mises pour $f = 0$.

Ce modèle donne de bonnes approximations pour de forts taux de triaxialité, mais il surestime la déformation à rupture pour de faibles taux de triaxialité, Chambert (2001). Tvergaard a donc proposé une extension de ce modèle en introduisant trois coefficients q_1 , q_2 et q_3 . Par ailleurs, la modélisation a été étendue au cas d'un matériau écrouissable en remplaçant la limite d'écoulement en traction de la matrice σ_y par la contrainte équivalente de traction σ_M ⁹ de la matrice. La fonction de charge prend alors la forme suivante :

$$\Phi(\underline{\sigma}, \sigma_M, f) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_M^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\sigma_m}{\sigma_M}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (3.120)$$

Les valeurs généralement adoptées dans la littérature pour q_2 et q_3 sont respectivement $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$. Pour q_1 , les valeurs proposées diffèrent suivant les auteurs. Retenons la valeur proposée par Tvergaard : $q_1 = 1.5$.

Par ailleurs, pour des conditions de chargement en compression, il ne doit pas y avoir *a priori* croissance des cavités. Pour tenir compte de cela, il est possible de prendre pour fonction de charge, si $\sigma_m < 0$:

$$\Phi(\underline{\sigma}, \sigma_M, f) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_M^2} + 2q_1 f - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (3.121)$$

Il s'agit à présent de préciser les lois d'évolution des différentes variables introduites, et en particulier de la fraction volumique de vides f .

Loi d'évolution de f

Le taux de variation de la fraction volumique est généralement la somme de deux termes :

$$\dot{f} = \dot{f}_{nu} + \dot{f}_{cr} \quad (3.122)$$

où \dot{f}_{nu} et \dot{f}_{cr} représentent respectivement le taux de variation dû à la nucléation (ou la germination) de nouvelles cavités, et le taux de variation dû à la croissance de toutes les cavités. Concernant la nucléation de nouvelles cavités, elle peut être contrôlée soit

par la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}_M^p$ de la matrice, soit par la contrainte normale maximale $\sigma_m + \sigma_M$. On peut également trouver les deux types de mécanismes à la fois. Mathématiquement, cela se traduit par une équation du type :

$$\dot{f}_{nu} = \mathcal{A} \bar{\varepsilon}_M^p + \mathcal{B}(\dot{\sigma}_m + \dot{\sigma}_M) \quad (3.123)$$

Pour ne prendre en compte qu'un des deux modes d'amorçage, il suffit d'annuler indépendamment \mathcal{A} ou \mathcal{B} .

⁹Contrairement aux sections précédentes, la contrainte d'écoulement est ici notée σ_M , pour mettre en évidence le fait que celle-ci concerne la matrice.

Chu et Needleman ont suggéré une distribution normale pour la nucléation. Dans ce cas, les coefficients \mathcal{A} et \mathcal{B} s'écrivent :

$$\mathcal{A} = \frac{f_n}{s_n \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_M^p - \varepsilon_n}{s_n} \right)^2 \right\} \quad (3.124)$$

$$\mathcal{B} = \frac{f_n}{s_n \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(\sigma_m + \sigma_M) - \sigma_n}{s_n} \right)^2 \right\} \quad (3.125)$$

Dans ces relations, f_n représente soit la fraction de cavités nucléées pilotée en déformation, soit la fraction de cavités nucléées pilotée en contrainte. s_n représente l'écart type de la distribution, tandis que ε_n et σ_n sont respectivement la déformation et la contrainte moyennes de nucléation. Pour la phase de croissance, on peut tout d'abord écrire que la déformation volumique totale est telle que :

$$tr \underline{\underline{\varepsilon}} = \ln(V_{tot}) \quad (3.126)$$

L'hypothèse d'incompressibilité plastique de la matrice implique que les déformations volumiques de la matrice ne peuvent être qu'élastiques.

Par ailleurs, la fraction volumique n'est supposée évoluer que par déformation plastique, ce qui signifie que la déformation volumique élastique des cavités est négligée.

De ce fait, la déformation volumique totale sera la somme de la déformation volumique plastique des cavités $tr \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ et de la déformation volumique élastique de la matrice $tr \underline{\underline{\varepsilon}}^e$.

D'où :

$$tr \underline{\underline{\varepsilon}} = tr \underline{\underline{\varepsilon}}^e + tr \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.127)$$

De plus, d'après (3.118) :

$$V_{tot} = \frac{V_{mat}}{1-f} \quad (3.128)$$

Soit en dérivant (3.126) et en utilisant (3.128) :

$$tr \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\dot{V}_{mat}}{V_{mat}} + \frac{\dot{f}_{cr}}{1-f} \quad (3.129)$$

Dans cette relation, c'est bien \dot{f}_{cr} qui intervient puisque l'on exprime une vitesse de variation volumique de cavités déjà existantes.

Et comme par ailleurs :

$$tr \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e = \frac{\dot{V}_{mat}}{V_{mat}} \quad (3.130)$$

On en déduit, avec (3.127) :

$$\boxed{\dot{f}_{cr} = (1-f) tr \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p} \quad (3.131)$$

Lois d'évolution des autres variables internes

La loi de comportement élastique est supposée inchangée. La relation (3.65) est donc toujours valable.

Concernant l'évolution des déformations plastiques, la règle de normalité de l'écoulement dans la matrice implique la normalité macroscopique, Tvergaard (1990). Donc :

$$\boxed{\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\sigma}}} \quad (3.132)$$

Par ailleurs, la dissipation plastique du matériau est supposée égale à la dissipation plastique équivalente de la matrice¹⁰, soit :

$$\underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p = (1 - f) \sigma_M \dot{\bar{\varepsilon}}_M^p \quad (3.133)$$

Ce qui donne l'évolution de $\bar{\varepsilon}_M^p$:

$$\boxed{\dot{\bar{\varepsilon}}_M^p = \dot{\lambda} \frac{\underline{\sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\sigma}}}{(1 - f) \sigma_M}} \quad (3.134)$$

Dans le cas où l'on considère un matériau sensible à la vitesse de déformation, σ_M s'écrit sous la forme :

$$\sigma_M = k (\bar{\varepsilon}_M^p)^n \left(1 + \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_M^p}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (3.135)$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de $\dot{\bar{\varepsilon}}_M^p$:

$$\boxed{\dot{\bar{\varepsilon}}_M^p = \gamma \left(\frac{\sigma_M - k (\bar{\varepsilon}_M^p)^n}{k (\bar{\varepsilon}_M^p)^n} \right)^m} \quad (3.136)$$

Dans ce cas, l'équation $\Phi = 0$ peut être vue comme un potentiel plastique, et non plus comme une surface de charge. La relation (3.132) reste valable, et on peut obtenir une expression de $\dot{\lambda}$ à partir de la relation (3.134) :

$$\boxed{\dot{\lambda} = (1 - f) \frac{\sigma_M \dot{\bar{\varepsilon}}_M^p}{\underline{\sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\sigma}}}} \quad (3.137)$$

Ce qui montre que, contrairement au cas du comportement indépendant du temps, la vitesse de déformation n'est plus définie à un scalaire multiplicatif près, mais est ici précisée explicitement, sans avoir recours à la condition de consistance.

¹⁰qui peut être vue comme la dissipation plastique moyenne pour le matériau sain fictif équivalent

Prise en compte de la phase de coalescence

La dernière phase du mécanisme d'endommagement ductile est la phase de coalescence des cavités, conduisant à la rupture ductile. Pour tenir compte de la perte rapide de rigidité du matériau au moment de la coalescence, Tvergaard et Needleman proposent de remplacer f dans la fonction de charge Φ par la fonction $f^*(f)$ telle que :

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_C \\ f_C + \frac{f_U^* - f_C}{f_F - f_C} (f - f_C) & \text{si } f > f_C \end{cases} \quad (3.138)$$

où f_F est la porosité correspondant à la rupture finale et $f_U^* = f^*(f_F) = \frac{1}{q_1}$.

f_C correspond à une fraction critique à partir de laquelle la coalescence a lieu.

La fonction de charge devient donc :

$$\boxed{\Phi(\underline{\sigma}, \sigma_M, f^*) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_M^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\sigma_m}{\sigma_M}\right) - 1 - q_3 (f^*)^2 = 0} \quad (3.139)$$

3.6 Comportement matériel en transformations finies

Les modèles de comportement ont été présentés dans le cadre du formalisme des petites perturbations. Ce formalisme peut, sous certaines hypothèses, être conservé. C'est le cas par exemple si l'on utilise des pas d'intégration suffisamment petits pour considérer qu'entre deux pas de calcul les déformations sont petites. Mais dans le cas général, il faut tenir compte des grandes déformations qui surviennent. Il convient donc d'écrire les lois de comportement dans le cadre du formalisme propre aux transformations finies. Cette section mettra donc en évidence les modifications induites par les transformations finies dans les formulations précédentes.

D'une manière générale, nous avons indiqué dans le cadre des petites perturbations, que le comportement matériel était entièrement défini par la donnée de deux potentiels ψ et F (ou f_p dans le cas de la plasticité associée). Pour mettre en évidence les modifications souhaitables pour prendre en compte les aspects géométriques liés aux grandes déformations, il faut déterminer les variables dont dépendent ces deux potentiels.

Le potentiel de dissipation F dépend du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$, de la contrainte d'écoulement R et des variables internes représentant l'état d'écrouissage et d'endommagement, le cas échéant de la température T . Le formalisme introduit dans le cadre des transformations finies ne modifie pas ces dépendances.

Le potentiel énergie libre ψ dépend de la température, des variables internes représentant l'état d'écrouissage et d'endommagement, mais surtout de la mesure des déformations élastiques. Par conséquent, son expression est liée au tenseur de déformations élastiques choisi. C'est donc essentiellement la loi de comportement reliant les contraintes aux déformations qui se trouve affectée par l'introduction des grandes déformations.

Avant de préciser la formulation de ces lois de comportement en transformations finies, rappelons rapidement une notion importante, à savoir le principe d'objectivité.

3.6.1 Principe d'objectivité

Ce principe, également appelé principe d'indifférence matérielle, stipule que la loi de comportement doit être invariante dans tout changement de référentiel. Autrement dit, elle doit être indépendante de l'observateur.

Pour satisfaire ce principe, il est nécessaire, que la loi de comportement ne dépende que de quantités elles-mêmes objectives.

Considérons un changement de référentiel défini comme suit :

$$\vec{x}^* = \vec{c} + \underline{Q} \vec{x} \quad (3.140)$$

où \vec{c} représente une translation et \underline{Q} est un tenseur orthogonal ($\underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{1}$). Cela revient donc à superposer au déplacement un mouvement de corps rigide.

Une quantité vectorielle \vec{t} définie dans la configuration lagrangienne est objective si elle est invariante par ce changement de référentiel, c'est-à-dire :

$$\vec{t}^* = \vec{t} \quad (3.141)$$

où \vec{t}^* représente le transporté de \vec{t} dans le nouveau référentiel.

De même, une quantité \underline{A} tensorielle lagrangienne d'ordre deux est objective si :

$$\underline{A}^* = \underline{A} \quad (3.142)$$

Dans la configuration eulérienne, un vecteur et un tenseur d'ordre deux sont dits objectifs s'ils se comportent respectivement comme un vecteur et un tenseur d'ordre deux par changement de référentiel, c'est-à-dire si :

$$\vec{t}^* = \underline{Q} \vec{t} \quad \text{et} \quad \underline{A}^* = \underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T \quad (3.143)$$

Il y a donc lieu de distinguer les tenseurs objectifs de ceux qui ne le sont pas, pour savoir lesquels sont susceptibles d'intervenir dans la description du comportement.

Les tenseurs lagrangiens sont clairement objectifs, puisqu'ils sont définis sur une configuration qui n'est pas affectée par le changement de référentiel. C'est donc le cas pour les tenseurs de déformations \underline{E} , \underline{C} , \underline{U} , \underline{e}_α . On montre aisément que les tenseurs eulériens \underline{A} , \underline{B} , \underline{V} , $\underline{\bar{e}}_\alpha$ sont également des tenseurs objectifs.

Concernant les tenseurs de contraintes, les tenseurs $\underline{\sigma}$, \underline{S} , $\underline{\tau}$ sont objectifs.

De ce qui vient d'être évoqué, on peut donc déduire que :

- Une loi de comportement écrite dans la configuration lagrangienne pourra faire intervenir par exemple, le tenseur des déformations \underline{E} et le tenseur des contraintes \underline{S} ,
- Une loi de comportement écrite dans la configuration eulérienne pourra par exemple utiliser le tenseur de déformations \underline{B} et le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$.

Cependant, en élasto-plasticité, les lois de comportement sont fréquemment écrites en vitesse. Les dérivées temporelles des tenseurs ainsi utilisées doivent elles aussi être objectives.

Les tenseurs lagrangiens ont, pour les mêmes raisons que précédemment, leurs dérivées temporelles objectives. C'est le cas par exemple pour $\underline{\dot{E}}$ et $\underline{\dot{S}}$. Le problème est moins simple pour les tenseurs eulériens. En effet, si \underline{D} est un tenseur objectif, $\underline{\dot{D}}$ ne l'est pas. Ainsi, $\underline{\dot{D}}$ ne pourra pas intervenir directement dans l'expression recherchée, et il importe de définir

une dérivée objective du tenseur des contraintes. Parmi les dérivées objectives les plus utilisées, on trouve :

- La dérivée de Truesdell :

$$\underline{\sigma}^{Tr} = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{L}\underline{\sigma} - \underline{\sigma}\underline{L}^T + \underline{\sigma}tr\underline{D} \quad (3.144)$$

- La dérivée de Jaumann (ou dérivée corotationnelle) :

$$\underline{\sigma}^J = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\Omega}\underline{\sigma} + \underline{\sigma}\underline{\Omega} \quad (3.145)$$

où $\underline{\Omega}$ est égal à $\dot{\underline{Q}}\underline{Q}^T$.

- La dérivée de Lie (ou dérivée convective contravariante)

$$\boxed{\underline{\sigma}^c = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{L}\underline{\sigma} - \underline{\sigma}\underline{L}^T} \quad (3.146)$$

C'est cette dérivée objective qui sera utilisée dans le cadre de ces travaux. Ce choix est dicté par le type d'algorithme d'intégration des lois de comportement que nous avons mis en place et que nous présenterons au chapitre 4. L'écriture de ces derniers se trouve en effet simplifiée par l'utilisation de cette dérivée objective.

Nous pouvons maintenant préciser la formulation du comportement matériel.

3.6.2 Formulation des lois de comportement

De façon générale, dans le cas des matériaux métalliques en grandes déformations, on trouve deux types de formulations.

- La première repose sur la notion de milieu hyperélastique. Un milieu est dit hyperélastique si le potentiel énergie libre est fonction du tenseur de Green-Lagrange \underline{E} , et si la dissipation intrinsèque est identiquement nulle, Coirier (2001). L'écriture lagrangienne de la loi de comportement prendra donc la forme suivante :

$$\underline{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \quad (3.147)$$

On peut montrer qu'une écriture eulérienne équivalente prend la forme suivante :

$$\underline{\sigma} = 2\rho B \frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}} \quad (3.148)$$

Cette formulation est aujourd'hui fréquemment utilisée dans le cas des matériaux métalliques. Elle présente l'avantage d'introduire explicitement un potentiel dont dérive la loi de comportement. Elle s'inscrit donc rigoureusement dans le cadre du formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles.

- La seconde formulation considère le matériau comme ayant un comportement de type hypoélastique, c'est-à-dire dont la loi de comportement s'écrit :

$$\overset{\circ}{\underline{\sigma}} = \mathcal{G}(\underline{\sigma}, \underline{D}) \quad (3.149)$$

où $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}$ représente une dérivée objective de $\underline{\sigma}$.

En pratique, par analogie avec le formalisme des petites perturbations, la loi de comportement est souvent prise sous la forme :

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{D}}^e \quad (3.150)$$

Par rapport à la formulation hyperélastique, l'approche hypoélastique n'introduit pas formellement de potentiel. D'ailleurs, la réponse élastique n'est pas explicitement définie ici, Simo et Hughes (1998). Néanmoins, elle reste valable si les déformations sont petites devant les déformations plastiques, ce qui est le cas pour les métaux. Elle constitue par ailleurs un moyen simple d'étendre les relations aux transformations finies.

Dans ces travaux, on considérera que le matériau obéit à une loi de type hypoélastique, qui prendra la forme suivante :

$$\underline{\underline{\tau}}^c = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{D}} \quad (3.151)$$

où $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur du quatrième ordre.

Si on l'écrit en fonction du taux de déformations élastiques, on obtient :

$$\boxed{\underline{\underline{\tau}}^c = \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{D}}^e} \quad (3.152)$$

A partir de là, les relations précédentes se généralisent sans difficulté aux transformations finies.

Afin de montrer comment il est possible d'étendre les relations définissant le comportement matériel au formalisme des transformations finies, nous envisageons un comportement élasto-plastique. Les autres types de comportement (élasto-viscoplasticité et endommagement) se généralisent de la même façon.

Dans le cas élasto-plastique, la loi de comportement (3.65) est à remplacer par (3.152). L'hypothèse de partition des déformations (3.20) n'étant plus valable, elle est remplacée par l'additivité des taux de déformations (3.27) :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^e + \underline{\underline{D}}^p$$

La fonction définissant le seuil d'élasticité s'écrit toujours :

$$f_p = \sigma_{eq} - \sigma_0$$

avec :

$$\sigma_0 = \sigma_y + R$$

et :

$$R = R(\bar{\varepsilon}^p)$$

La déformation plastique équivalente est définie par :

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \underline{\underline{D}}^p : \underline{\underline{D}}^p \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (3.153)$$

Enfin, le tenseur des taux de déformation plastique s'écrit :

$$\underline{\underline{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (3.154)$$

On obtient le même type de relation qu'avec le formalisme des petites perturbations pour l'évolution des variables internes (ici, la déformation plastique équivalente) :

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}$$

Les différents modèles de comportement décrits précédemment se généralisent de la même façon. Pour le modèle de type Lemaître, la variable interne d'endommagement n'étant pas modifiée par l'introduction des concepts géométriques précédents, le potentiel de dissipation d'endommagement introduit conserve la même forme.

La formulation hypoélastique permet donc une extension simple des lois de comportement au formalisme des transformations finies.

Ayant discuté la modélisation des trois premières phases du découpage, c'est-à-dire le comportement élastique, l'écoulement (visco)plastique et l'endommagement progressif, il s'agit maintenant de modéliser la phase de rupture de la tôle. Cette modélisation est décomposable en deux étapes distinctes. D'une part, il faut déterminer le lieu d'amorçage d'une fissure et d'autre part il faut étudier la propagation des fissures amorcées. La section suivante traite des stratégies retenues pour détecter le lieu d'apparition d'une fissure.

3.7 Détection de l'amorçage d'une fissure macroscopique

3.7.1 Introduction

Le problème de l'initiation des fissures peut être traité de différentes manières. Si l'on utilise un modèle couplant déformation et endommagement, il est possible de détecter le lieu d'amorçage d'une fissure à l'aide du calcul de l'endommagement. Dans le cas d'un modèle non couplé, il est en revanche nécessaire d'introduire une nouvelle fonction critère représentative de l'état d'endommagement dans le matériau. Ces deux techniques sont explicitées ci-après.

3.7.2 Prédiction de l'amorçage d'une fissure par une zone complètement endommagée

Si l'on utilise l'un ou l'autre des modèles d'endommagement décrits précédemment, il est possible de considérer l'apparition d'une fissure par l'intermédiaire des variables d'endommagement introduites.

Ainsi, pour le modèle de type Lemaître, un élément de volume sera déclaré rompu si $D \geq D_C$, D_C étant la valeur critique à rupture de D caractéristique du matériau. Pour le modèle de Gurson modifié, il y aura rupture de l'élément de volume lorsque $f \geq f_F$, f_F étant la fraction volumique correspondant à la rupture.

3.7.3 Les modèles non couplés

La seconde approche très utilisée en découpage des métaux a déjà été évoquée dans le chapitre 2. Il s'agit de prédire l'initiation d'une fissure macroscopique par l'intermédiaire

d'une fonction indicatrice de l'endommagement, ou critère de rupture. Il existe de nombreux critères disponibles dans la littérature.

La caractéristique commune à l'ensemble de ces critères réside dans le fait que les propriétés mécaniques ne sont pas affectées par l'endommagement progressif du matériau. L'objectif n'est pas ici de dresser un tableau exhaustif de l'ensemble des critères de rupture que l'on peut trouver dans la littérature. Le lecteur intéressé par cette question pourra se référer aux travaux respectifs de Hambli (1996) et de Wisselink (2000).

La question du choix d'un critère de rupture ductile a déjà été évoquée dans le chapitre bibliographique. Suite aux remarques formulées à cette occasion, plusieurs critères de rupture ont été retenus. Le choix s'est porté à la fois sur les plus utilisés et sur ceux qui donnent les résultats les plus satisfaisants en découpage.

Plusieurs auteurs se sont basés sur une analyse microscopique du comportement matériel pour caractériser l'évolution de l'endommagement (Rice et Tracey, 1969; Oyane *et al.*, 1980). Ils déterminent le taux de croissance d'une cavité sous la forme suivante :

$$\frac{dV}{V} = \Lambda(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.155)$$

où V représente le volume actuel de la cavité, et dV sa variation infinitésimale. Λ est une fonction scalaire de $\underline{\sigma}$ et de $\underline{\varepsilon}$. $d\bar{\varepsilon}^p$ représente une variation infinitésimale de la déformation plastique équivalente. Cette expression du taux de croissance d'une cavité ne constitue pas en tant que telle un critère de rupture. Pour obtenir celui-ci, la méthode généralement adoptée consiste à intégrer cette expression et à considérer que la rupture survient lorsque la taille des cavités atteint une valeur critique V_R :

$$\ln\left(\frac{V_R}{V_0}\right) = \int_{t_r} \Lambda dt = D_c \quad (3.156)$$

où le paramètre t_r représente symboliquement toute l'histoire du chargement de l'instant initial jusqu'à la rupture. D_c est la valeur critique à rupture du critère considéré. C'est une caractéristique du matériau qu'il faut déterminer expérimentalement. Par la suite, nous garderons cette notation D_c pour la valeur critique. Il faut cependant garder à l'esprit que cette valeur est différente d'un critère à l'autre, et qu'elle ne constitue pas une grandeur intrinsèque¹¹.

Une autre approche couramment adoptée est de nature purement empirique. Elle consiste à établir une fonction de l'histoire du chargement censée représenter l'évolution de l'endommagement au cours de la déformation. Ces critères se mettent donc sous la forme générale suivante :

$$\int_0^{\varepsilon_R} \Lambda(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}^p = D_c \quad (3.157)$$

La forme générale de ce type de critère est donc très proche de ceux établis par l'approche microscopique. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que leur mode d'établissement n'est pas le même.

Dans la suite de cette section, nous allons présenter quelques modèles reposant sur l'approche microscopique. Puis, nous exposerons quelques modèles empiriques.

¹¹Elle n'a en outre rien à voir avec la valeur critique D_c évoquée dans le cadre de l'approche couplée.

Modèle de Rice et Tracey

Les hypothèses associées à ce modèle sont les suivantes :

- La cavité est de forme sphérique dans une matrice infinie,
- Le comportement de la matrice est rigide parfaitement plastique et obéit au critère de von Mises,
- Le milieu est soumis à un chargement axisymétrique de traction à l'infini défini par $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ et σ_{33} .

Dans leur développement, les auteurs introduisent notamment deux facteurs, \mathcal{D} et \mathcal{F} représentant respectivement le changement de volume et le changement de forme de la cavité sphérique. Ils montrent que pour des taux de triaxialité élevés, le changement de forme est négligeable devant le changement de volume, ce qui les conduit finalement à l'expression suivante :

$$\frac{dR}{R} = 0.283 \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right) d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.158)$$

Le lecteur intéressé trouvera des détails sur l'établissement de ce modèle dans la thèse de Chambert (2001). On trouvera également dans cette référence une discussion sur les différentes formulations de celui-ci.

Retenons simplement deux points importants : d'une part, l'introduction de σ_{eq} à la place de la limite d'écoulement σ_y pour le matériau rigide parfaitement plastique dans l'expression précédente permet de prendre en compte l'écrouissage du matériau. D'autre part, des études plus récentes ont montré que le coefficient 0.283 était trop faible pour des taux de triaxialité modérés. Certains auteurs ont donc modifié cette valeur, ce qui conduit à des versions différentes de ce critère.

Le critère de rupture correspondant s'écrit finalement, en introduisant le coefficient 0.283 dans la valeur critique à rupture :

$$D_c = \frac{1}{0.283} \ln\left(\frac{R_R}{R_0}\right) = \int_0^{\bar{\varepsilon}_R^p} \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.159)$$

Ce critère a notamment été utilisé en découpage par Hambli et Reszka (2002), Goijaerts (1999). Précisons que Goijaerts utilise une version modifiée en remplaçant le coefficient 3/2 par 2.9. Les confrontations avec les données expérimentales ont été réalisées avec succès pour les applications présentées.

Modèle de Oyane

L'évolution du volume d'une cavité est ici donnée sous la forme :

$$\frac{dV}{V} = \left(a + b \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.160)$$

Oyane *et al.* (1980) proposent alors le critère de rupture suivant :

$$D_C = \int_0^{\bar{\varepsilon}_R^p} \left\langle 1 + A \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right\rangle d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.161)$$

où A est une constante matérielle à identifier. La partie positive $\langle \rangle$ est prise pour s'assurer qu'il ne peut y avoir de diminution d'endommagement.

Là encore, ce critère semble donner des résultats satisfaisants en découpage, Goijaerts (1999). Notons qu'il présente, tout comme le critère de Rice et Tracey, une dépendance au taux de triaxialité $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$.

Nous allons maintenant aborder les modèles déterminés de manière empirique en indiquant également, pour chacun de ces critères, les applications au cas du découpage.

Critère de la déformation plastique équivalente

C'est certainement le plus simple, puisqu'il consiste à considérer que la rupture apparaît lorsque la déformation plastique équivalente atteint une valeur critique, notée ε_R .

Hambli (1996) indique que ce critère donne des résultats imprécis, dans la mesure où il est insensible à l'énergie de déformation volumique. Les mêmes remarques sont formulées par Maillard (1991) qui l'a comparé au critère de Rice et Tracey.

Critère de Freudenthal

Basé sur l'énergie plastique dissipée, celui-ci s'exprime par :

$$D_C = \int_0^{\varepsilon_R^p} \sigma_{eq} d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.162)$$

Gouveia *et al.* (2000), Hambli (1996), parmi d'autres, ont étudié ce critère. Les conclusions ne semblent pas toujours être concordantes quant à son utilisation pour différents types de sollicitations. Clift *et al.*, cités par Hambli, indiquent que seul ce critère parmi d'autres testés permet d'être en accord avec les résultats expérimentaux pour différents essais tels que la compression d'un cylindre ou l'extrusion d'un lopin cylindrique. En revanche, Gouveia *et al.* n'arrivent pas aux mêmes conclusions pour les expériences qu'ils ont menées.

Critère de Cockroft et Latham

Il s'agit essentiellement ici d'une modification du critère de Freudenthal. Le critère s'écrit :

$$D_C = \int_0^{\varepsilon_R^p} \langle \sigma_1 \rangle d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.163)$$

où σ_1 représente la composante maximale des contraintes principales.

C'est un critère très utilisé dans le cadre du découpage (Faura *et al.*, 1998; Fang et Zeng, 2002; Ko *et al.*, 1997; Quinlan et Monaghan, 1998; Jeong *et al.*, 1996). On le trouve implémenté dans certains logiciels commerciaux tels que DEFORM2D. Si Gouveia *et al.* (2000) présentent des résultats en assez bon accord avec les résultats expérimentaux, Goijaerts (1999) propose une confrontation numérique/expérimental dans laquelle ce critère ne donne pas les meilleurs résultats.

D'autres critères sont présentés dans la thèse de Hambli (1996). Plusieurs auteurs ont effectué une analyse comparative de différents critères dans le cas du découpage, mais aussi

pour d'autres procédés de mise en forme. On pourra consulter entre autres les références (Hamblin et Reszka, 2002; Gouveia *et al.*, 2000; Goijaerts, 1999). Les conclusions n'étant pas toutes unanimes, il est difficile de dresser un bilan définitif fiable sur l'aptitude de chacun de ces critères en découpage. Notons que si le critère de Cockroft et Latham est l'un des plus utilisés, le critère de Rice et Tracey et le critère d'Oyane semblent donner de meilleurs résultats en découpage.

L'avantage majeur de ces critères est leur simplicité d'implémentation. En revanche, ils sont a priori moins précis qu'un modèle couplé, puisque les caractéristiques mécaniques restent inchangées au cours de l'endommagement, ce qui n'est pas le cas en réalité.

Globalement, la mise en place de l'un ou l'autre de ces critères ne pose pas de difficulté numérique. C'est la raison pour laquelle l'ensemble des critères cités a été ajouté à notre programme de calcul. Il est en effet difficile, sur la base bibliographique existant en découpage, de privilégier l'une ou l'autre des stratégies proposées.

Lorsqu'une fissure est initiée au sein du matériau, il est nécessaire de déterminer comment elle va se propager. La section suivante synthétise ce qui a été évoqué dans le chapitre 2 à ce sujet.

3.8 Propagation d'une fissure

3.8.1 Problématique

L'étude de la propagation nécessite en toute rigueur l'analyse du milieu fissuré, notamment des singularités du champ de contraintes en pointe de fissure. Il faut donc faire appel à la théorie de la mécanique de la rupture.

On considère généralement trois grandes classes de problèmes en mécanique de la rupture :

- Les milieux dont le comportement est élastique. La théorie pour la mécanique linéaire de la rupture est aujourd'hui bien établie, et a fait l'objet de très nombreux travaux.
- Le milieu présente une zone de déformation plastique au voisinage de la pointe de la fissure. C'est le domaine de la plasticité confinée. Dans ce cas, on montre que l'on peut étendre les concepts de la mécanique linéaire de la rupture, sous certaines conditions, en considérant un milieu élastique non linéaire équivalent.
- La zone de déformation plastique n'est plus limitée au voisinage de la pointe de la fissure. On dit que l'on se situe en plasticité étendue. Cette fois, les notions introduites précédemment ne sont plus directement transposables.

Le problème qui nous intéresse en découpage relève plutôt de la troisième catégorie. La détermination précise des singularités en pointe de fissure est de ce fait un problème complexe. Néanmoins, il est possible de traiter le problème de propagation de façon énergétique, en utilisant la notion d'intégrale de Rice, par exemple. De cette façon, le calcul est moins conditionné par la connaissance des singularités des champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure, (Miannay, 1995; Bouchard, 2000). Cependant, la mise en œuvre de telles méthodes nécessite des aménagements importants par rapport à un calcul éléments finis classique. En particulier, la mise au point du maillage en pointe de fissure doit être examinée avec attention.

Bouchard (2000) a proposé un exemple d'application au cas du découpage. Cependant, le calcul n'est pas mené à son terme dans la mesure où des problèmes d'interpénétration des lèvres d'une fissure surviennent. Exceptée cette application, peu ou pas de travaux utilisent les concepts de la mécanique de la rupture ¹².

3.8.2 Stratégie retenue

Bien qu'en toute rigueur il soit nécessaire d'étudier dans le cas du découpage le milieu fissuré au cours de la déformation, le traitement de la propagation d'une fissure par les concepts de la mécanique de la rupture n'a pas été abordé dans le cadre de ces travaux pour des raisons déjà évoquées (cf. chapitre 2) : la fissuration en découpage des métaux reste suffisamment simple pour être traitée numériquement. Par ailleurs, la mise en place d'une telle méthode nécessite des aménagements importants, notamment sur le maillage éléments finis. Néanmoins, nous pensons que le couplage mécanique des milieux continus/mécanique de la rupture qui en résulte constitue une voie intéressante pour analyser ce type de problèmes. L'étude de la propagation de la fissure par des méthodes numériques sera donc traitée dans le chapitre suivant.

Conclusion

Ce chapitre a présenté les hypothèses et les modèles retenus pour la simulation numérique du découpage.

La résolution de l'équilibre global du système comporte la prise en compte des conditions de contact avec frottement entre la tôle et les outils supposés rigides. Les effets inertiels sont négligés et le procédé de découpage est considéré comme un procédé quasi-statique. Nous avons en effet montré que les termes dynamiques sont faibles devant ceux dus à la déformation inélastique de la tôle.

Au niveau local, la prise en compte des effets de la vitesse de déformation et de la température a été présentée. Celle-ci repose sur la modélisation du comportement par une formulation thermo-élasto-viscoplastique dans un cadre adiabatique.

Pour prendre en compte les effets de l'endommagement sur le comportement de la tôle, deux modèles ont été retenus. Le premier (modèle de type Lemaître), basé sur une approche phénoménologique, caractérise l'endommagement par une variable interne macroscopique. Il s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Le second (modèle de type Gurson), basé sur une observation microscopique de l'endommagement, introduit une variable interne représentant l'évolution de l'endommagement par nucléation, croissance puis coalescence des cavités.

Différentes approches sont possibles pour la prédiction de l'amorçage d'une fissure dans la tôle. Nous avons retenu celles qui sont le plus couramment utilisées en découpage des métaux. L'amorçage en endommagement critique (modèles couplés), tout d'abord. Celui-ci a lieu dès que la variable d'endommagement calculée dépasse un seuil critique. L'amorçage par l'intermédiaire de critères de rupture (modèles non couplés) ; ils reposent sur le calcul d'une quantité liée à l'apparition et au développement de l'endommagement

¹²Notons qu'une méthode, baptisée X-FEM (eXtended Finite Element Method), a été récemment développée afin de prendre en compte dans le maillage des discontinuités, Sukumar *et al.* (2000). Cependant, à notre connaissance, celle-ci n'a pas été à ce jour appliquée au cas du découpage des métaux.

au sein du matériau. Si cette quantité dépasse une valeur critique à rupture caractéristique du matériau, on considère qu'une fissure macroscopique est amorcée.

La propagation d'une fissure initialement amorcée est un problème complexe dans la mesure où l'on traite un problème en plasticité étendue par rapport à la pointe de la fissure. Plutôt que de traiter ce problème en utilisant les concepts de la mécanique de la rupture, le choix est fait de modéliser cette propagation par une méthode numérique. Son traitement sera donc exposé au chapitre 4.

Il s'agit à présent de mettre en œuvre l'ensemble des modélisations mécaniques proposées pour les différentes phases du découpage dans le cadre d'une formulation éléments finis. Le chapitre suivant présente ces développements numériques. Les algorithmes d'intégration mis en place, tant au niveau local qu'au niveau global, seront présentés.

Chapitre 4

Contribution à la simulation numérique du découpage

Sommaire

Introduction	86
4.1 Discrétisation spatiale	86
4.1.1 Principe des puissances virtuelles	86
4.1.2 Passage du problème continu au problème discret	87
4.2 Remaillage	90
4.2.1 Introduction	90
4.2.2 Choix du mailleur	90
4.2.3 Critères d'activation du remaillage	91
4.2.4 Définition des paramètres de remaillage	91
4.2.5 Transfert des conditions aux limites	93
4.2.6 Transport des champs nodaux	94
4.2.7 Transport des champs aux points de Gauss	95
4.2.8 Rééquilibrage de la structure	97
4.2.9 Bilan	97
4.3 Intégration temporelle	100
4.3.1 Introduction	100
4.3.2 Méthode implicite	100
4.3.3 Méthode explicite	105
4.3.4 Bilan	106
4.4 Gestion du contact unilatéral avec frottement	107
4.4.1 Traitement du contact	107
4.4.2 Traitement du frottement	110
4.4.3 Bilan	111
4.5 Intégration numérique des lois de comportement	111
4.5.1 Énoncé du problème	111
4.5.2 Configuration intermédiaire d'intégration	112
4.5.3 Schéma d'intégration du tenseur des contraintes	113
4.5.4 Comportement élasto-plastique	114
4.5.5 Comportement élasto-viscoplastique	117

4.5.6	Modèle d'endommagement de type Lemaître	121
4.5.7	Modèle d'endommagement de type Gurson	124
4.5.8	Bilan	127
4.6	Analyse de la fissuration	128
4.6.1	Introduction	128
4.6.2	Première approche : non prise en compte de la propagation . .	128
4.6.3	Deuxième approche : Méthode d'élimination des éléments . . .	129
4.6.4	Troisième approche : analyse de la propagation d'une fissure . .	131
4.6.5	Bilan	134
	Conclusion	134

Introduction

Dans le chapitre précédent, la modélisation mécanique du découpage a été discutée. La mise en œuvre numérique, dans un programme éléments finis, de l'ensemble de ces modèles nécessite le développement d'algorithmes spécifiques. Ceux-ci sont présentés en détail dans ce chapitre.

Cet exposé est décomposé en deux parties. La première traite de la résolution de l'équilibre global de la structure. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la discrétisation spatiale du problème. L'algorithme de remaillage mis en place sera en particulier présenté. Puis nous traiterons de la discrétisation temporelle des équations d'équilibre. Deux approches sont envisagées, à savoir l'utilisation d'un algorithme quasi-statique implicite et celle d'un algorithme dynamique explicite. Enfin, la prise en compte des conditions de contact et de frottement seront discutés.

La deuxième partie traite des algorithmes locaux d'intégration des lois de comportement. Nous développerons successivement les spécificités de chaque méthode, en reprenant l'ordre chronologique d'apparition des différents types de comportement. Les modèles élasto-plastique, élasto-viscoplastique et les modèles couplant la déformation et l'endommagement seront présentés. Enfin, la stratégie de traitement numérique de la phase de rupture de la tôle sera exposée.

Le programme sur lequel l'ensemble des développements numériques a été réalisé est une partie du programme plus général POLYFORM développé par l'équipe Mise en Forme des matériaux du L.M.A.R.C. Les développements numériques présentés ci-après ont été ajoutés à la version initiale de ce code de calcul, une version spécifique du programme dédiée au découpage a été réalisée.

4.1 Discrétisation spatiale

Nous rappelons dans cette section la démarche de discrétisation spatiale des équations d'équilibre. L'algorithme de remaillage sera ensuite présenté.

4.1.1 Principe des puissances virtuelles

Dans le chapitre précédent, les équations d'équilibre local en description eulérienne (3.34) et lagrangienne (3.35) ont été écrites.

Le principe des puissances virtuelles s'obtient en multipliant scalairement l'une ou l'autre des équations (3.34)₁ et (3.35)₁ par un champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissibles et en intégrant sur tout le domaine. Soit, par exemple, en description eulérienne :

$$\int_{\Omega_t} \vec{div} \underline{\sigma} \cdot \vec{\delta v} dV_t + \int_{\Omega_t} \rho \vec{f} \cdot \vec{\delta v} dV_t = \int_{\Omega_t} \rho \vec{a} \cdot \vec{\delta v} dV_t \quad (4.1)$$

Avec toujours les conditions (3.34)₂₋₄, auxquelles il convient d'ajouter $\vec{\delta v} = \vec{0}$ sur $\Gamma_{\overline{\pi}}$.

On obtient à partir de cette relation et après quelques calculs la formulation faible du problème en description eulérienne :

$$\boxed{- \int_{\Omega_t} \underline{\sigma} : \underline{\delta D} dV_t + \int_{\Gamma_{\overline{\pi}}} \vec{\overline{t}} \cdot \vec{\delta v} dS_t + \int_{\Omega_t} \rho \vec{f} \cdot \vec{\delta v} dV_t = \int_{\Omega_t} \rho \vec{a} \cdot \vec{\delta v} dV_t} \quad (4.2)$$

avec $\begin{cases} \vec{u} = \vec{\overline{u}} & \text{sur } \Gamma_{\overline{\pi}} \\ \vec{\delta v} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_{\overline{\pi}} \\ \text{à } t = 0, \quad \vec{u} = \vec{u}_0 \text{ et } \vec{v} = \vec{v}_0 \end{cases}$

où $\underline{\delta D}$ représente le tenseur des taux de déformations virtuelles.

Chacun des termes intervenant dans cette expression peut s'interpréter comme suit :

- $\delta P_{int} = \int_{\Omega_t} \underline{\sigma} : \underline{\delta D} dV_t$ est la puissance virtuelle des efforts intérieurs,
- $\delta P_{ext} = \int_{\Gamma_{\overline{\pi}}} \vec{\overline{t}} \cdot \vec{\delta v} dS_t + \int_{\Omega_t} \rho \vec{f} \cdot \vec{\delta v} dV_t$ est la puissance virtuelle des efforts extérieurs,
- $\delta P_{dyn} = \int_{\Omega_t} \rho \vec{a} \cdot \vec{\delta v} dV_t$ est la puissance virtuelle due aux forces d'inertie.

On peut également écrire le principe des puissances virtuelles en description lagrangienne. Si on écrit simplement l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs sur la configuration lagrangienne, on obtient :

$$\delta P_{int} = \int_{\Omega_0} \underline{T} : \underline{grad} \vec{\delta v} dV_0 \quad (4.3)$$

en notant que cette fois l'opérateur gradient est relatif à la configuration initiale : $\left(\underline{grad} \vec{\delta v} \right)_{ij} = \frac{\partial \delta v_i}{\partial X_j}$, où X_j sont les coordonnées initiales du solide. On a donc :

$$\delta P_{int} = \int_{\Omega_0} \underline{T} : \delta \underline{\dot{E}} dV_0 \quad (4.4)$$

Cette expression sera utile par la suite, dans le cas des algorithmes de discrétisation temporelle implicites.

4.1.2 Passage du problème continu au problème discret

La discrétisation spatiale en éléments finis nécessite la subdivision du domaine Ω en m sous-domaines ou éléments. On adopte ici une formulation de type déplacement. Donc, sur

chacun des éléments, le déplacement \vec{u}^e , la vitesse \vec{v}^e et l'accélération \vec{a}^e sont discrétisés selon :

$$\begin{aligned}\vec{u}^e(\vec{x}, t) &= \sum_{i=1}^n N_i(\vec{x}) \vec{u}_i^e(t) \\ \vec{v}^e(\vec{x}, t) &= \sum_{i=1}^n N_i(\vec{x}) \vec{v}_i^e(t) \\ \vec{a}^e(\vec{x}, t) &= \sum_{i=1}^n N_i(\vec{x}) \vec{a}_i^e(t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

où n est le nombre de noeuds de l'élément considéré. $N_i(\vec{x})$ sont les fonctions d'interpolation nodales ou fonctions de forme. $\vec{u}_i^e(t)$, $\vec{v}_i^e(t)$, $\vec{a}_i^e(t)$ sont les valeurs nodales des champs de déplacement, de vitesse et d'accélération.

L'interpolation choisie est isoparamétrique, *ie* les fonctions de forme pour l'interpolation de la géométrie et du mouvement sont les mêmes. Dans (4.5), les dépendances vis-à-vis des coordonnées spatiales et temporelles sont rappelées pour distinguer les variables dépendant de l'espace de celles dépendant du temps.

La méthode de Galerkin consiste à prendre pour fonction d'interpolation des vitesses virtuelles les mêmes fonctions de forme. On a donc :

$$\vec{\delta v}^e(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\vec{x}) \vec{\delta v}_i^e\tag{4.6}$$

Pour simplifier les écritures, on utilisera par la suite des notations matricielles. Ainsi, l'équation (4.5)₁ s'écrira par exemple :

$$\vec{u}^e(\vec{x}, t) \equiv N u^e\tag{4.7}$$

Avec N la matrice d'interpolation et u^e le vecteur des déplacements nodaux élémentaires.

De même, $\underline{\delta D}^e$ s'écrira sous forme matricielle :

$$\delta D^e = \text{grad}^S N \delta v^e = \nabla^S(N) \delta v^e = B \delta v^e\tag{4.8}$$

où $B = \nabla^S(N)$ représente la partie symétrique de la matrice gradient des fonctions de forme.

Dans les exemples numériques des chapitres 5 et 6, nous utiliserons essentiellement des éléments triangulaires à six nœuds. La forme générale des matrices N et B pour ce type d'élément est fournie dans l'annexe A.

Munis de cette interpolation nodale, nous pouvons écrire la forme discrétisée de l'équation (4.2)₁ :

$$-\bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} (B \delta v^e)^T \sigma dV_t + \bigcup_{elts} \int_{\Gamma_t^e} (N \delta v^e)^T t dS_t + \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} (N \delta v^e)^T \rho f dV_t = \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} (N \delta v^e)^T \rho N a^e dV_t\tag{4.9}$$

où l'opérateur \bigcup_{elts} représente l'opérateur de sommation puis d'expansion sur l'ensemble de la structure.

Soit :

$$-\delta v^T \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} B^T \sigma dV_t + \delta v^T \bigcup_{elts} \int_{\Gamma_t^e} N^T t dS_t + \delta v^T \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} N^T \rho f dV_t = \delta v^T \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} N^T \rho N dV_t a \quad (4.10)$$

où a et δv représentent respectivement les vecteurs accélération et vitesse virtuelle nodaux pour toute la structure. δv étant arbitraire, on aboutit finalement à la forme condensée suivante :

$$\boxed{Ma = F_{ext}(u) - F_{int}(u)} \quad (4.11)$$

Avec :

$$M = \bigcup_{elts} M^e = \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} N^T \rho N dV_t \quad (4.12)$$

$$F_{ext} = \bigcup_{elts} F_{ext}^e = \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} \rho N^T f dV_t + \bigcup_{elts} \int_{\Gamma_t^e} N^T t dS_t \quad (4.13)$$

$$F_{int} = \bigcup_{elts} F_{int}^e = \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} B^T \sigma dV_t \quad (4.14)$$

M^e et M sont respectivement les matrices masses élémentaires et la matrice masse globale (pour toute la structure). F_{ext}^e et F_{ext} sont les vecteurs des efforts extérieurs élémentaires et globaux. F_{int}^e et F_{int} sont les vecteurs forces intérieures élémentaires et globales.

Dans l'équation (4.11), la dépendance des efforts extérieurs et intérieurs à u est rappelée. En effet, les efforts extérieurs, surfaciques ou volumiques peuvent éventuellement dépendre du déplacement. Quant aux efforts intérieurs, la dépendance à u est évidente puisque les contraintes sont reliées aux déformations, et donc aux déplacements, par l'intermédiaire du comportement matériel qui n'a pas été précisé explicitement ici.

L'écriture (4.11) est la formulation discrétisée du problème dynamique variationnel. Cette écriture est dite semi-discrète, dans la mesure où elle est discrétisée dans l'espace, mais pas dans le temps. Ce point sera l'objet de la section 4.3.

Remarques

- Le calcul des intégrales de volume se fait en pratique sur l'élément de référence. Par exemple, les efforts intérieurs élémentaires s'écriront :

$$\int_{\Omega_t^e} B^T \sigma dV_t = \int_{\Omega_t^r} B^T \sigma \det K dV_t^r \quad (4.15)$$

où K est la matrice jacobienne de la transformation géométrique¹ permettant de passer de l'élément de référence r à l'élément réel e .

¹ Celle-ci n'est pas notée J , pour ne pas confondre avec la transformation entre la configuration initiale et la configuration courante.

- Les intégrales sont évaluées numériquement par la méthode de Gauss. Cette méthode permet d'intégrer exactement un polynôme d'ordre inférieur ou égal à $2p - 1$ avec p points d'intégration. Pour les efforts intérieurs élémentaires, nous aurons par exemple :

$$\int_{\Omega_t} B^T \sigma \det K dV_t^r = \sum_{k=1}^p w_k B^T(g_k) \sigma(g_k) \det K \quad (4.16)$$

où w_k est le poids affecté au point d'intégration k , et g_k représente symboliquement les coordonnées de ce point d'intégration, pour indiquer que les quantités doivent être évaluées aux points d'intégration.

La définition de l'élément de référence et des points de Gauss pour l'élément triangulaire à 6 nœuds est fournie dans l'annexe A.

- Le cas échéant, il est possible d'introduire un terme Cv (v étant le vecteur vitesse nodal pour toute la structure) dans le premier membre de l'équation (4.11), pour tenir compte de l'amortissement du système. La matrice d'amortissement C est souvent choisie proportionnelle à la matrice masse.

4.2 Remaillage

4.2.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà évoqué, la tôle découpée est soumise à de grandes déformations, ce qui peut conduire dans une simulation par éléments finis à une distortion importante d'une partie des éléments. Ce problème entraîne une dégradation de la solution, et peut même faire échouer le calcul (jacobien négatif).

Pour éviter cela, il est intéressant d'utiliser un algorithme de remaillage, qui génère un nouveau maillage de la pièce chaque fois que cela est nécessaire. La qualité géométrique des éléments est alors conservée tout au long du calcul.

Les principales étapes de la mise en place d'un algorithme de remaillage sont détaillées dans la sous-section suivante.

4.2.2 Choix du mailleur

Le développement d'un mailleur performant est un sujet suffisamment vaste pour faire l'objet à lui seul d'un mémoire de doctorat. Par conséquent, nous nous placerons ici uniquement en tant qu'utilisateur de mailleurs existants. De nombreux mailleurs 2D ont été développés et sont aujourd'hui disponibles. Plusieurs mailleurs ont également été développés en interne, dans l'équipe Mise en Forme des matériaux du L.M.A.R.C. (Baida, 1998). L'évaluation de ces divers mailleurs a permis de sélectionner un outil répondant à nos attentes. Il s'agit du mailleur 'Bamg' développé par Frédéric Hecht, Inria².

Peu d'informations sont fournies sur l'algorithme de maillage utilisé par Bamg. Précisons simplement les caractéristiques principales de celui-ci³ :

²Disponible sur le site <http://www.rocq.inria.fr/Frederic.Hecht>

³De nombreuses autres fonctionnalités sont disponibles, mais n'ont pas été testées.

- Le maillage de la pièce est réalisé par des éléments triangles à 3 nœuds. Il est possible de transformer tous les triangles en quadrilatères, en décomposant chaque triangle en trois quadrilatères.
- Le contour de la pièce est défini par la donnée de points géométriques.
- Le paramètre de taille de maille est associé à chaque point géométrique défini.

Précisons que ce mailleur se révèle être le plus robuste et le plus rapide, parmi les différents mailleurs testés. Bien que la tôle ne soit pas d'une géométrie complexe, son maillage automatique peut en effet entraîner quelques difficultés. En particulier, le contour est défini au cours du calcul par les nœuds de l'ancien maillage. Or, dans la zone découpée, le maillage est très fin. Ceci conduit à définir un contour avec de nombreux points très proches les uns des autres, et possédant une caractéristique de taille de maille très petite. Le couplage de ces deux paramètres met en défaut bon nombre de mailleurs.

4.2.3 Critères d'activation du remaillage

Il existe plusieurs façons d'envisager l'automatisation du déclenchement du remaillage. Les principales sont les suivantes :

- Par périodicité : on choisit de déclencher le remaillage à une fréquence définie à l'avance,
- Par critère géométrique : si un élément du maillage est considéré comme dégénéré,
- Par critère de contact : une partie de la frontière du maillage doit être affinée pour suivre avec précision les contours des outils (rayons principalement),
- Par critère d'erreur : on met en place un remaillage adaptatif qui est déclenché dès que le critère d'erreur sur les résultats dépasse un seuil de tolérance.

Dans ce mémoire, nous ne nous intéresserons qu'aux deux premières méthodes. La première est très aisée à mettre en place. Pour la seconde, un critère d'angle est retenu. Dès qu'un élément du maillage voit un de ses angles α devenir inférieur à la limite minimale admise α_{min} (en pratique 20°), le remaillage est déclenché (cf. Fig. 4.1).

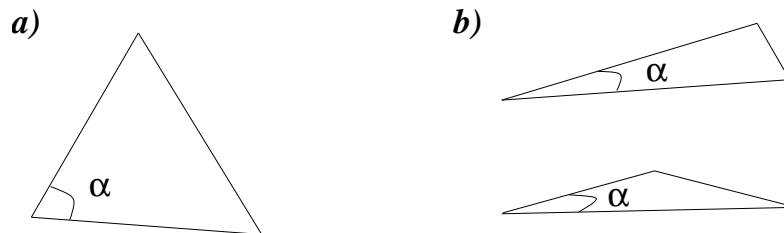


FIG. 4.1 – a) Éléments admissibles b) Exemples d'éléments distordus.

4.2.4 Définition des paramètres de remaillage

Pour des raisons de simplicité de mise en œuvre, nous choisissons de réaliser un remaillage complet de la tôle. Le temps de remaillage est négligeable par rapport à celui de la résolution elle-même. Ce choix n'est donc pas pénalisant.

Les paramètres utiles pour mailler automatiquement une pièce sont les suivants :

- Définition des points du contour,
- Définition des tailles de maille en ces points,

- Éventuellement, définition de points intérieurs à la pièce. L'ajout de points intérieurs ne sera pas nécessaire dans notre cas.

Les points du contour sont choisis comme étant les noeuds de l'ancien maillage. Pour définir la taille de maille en ces points, la tôle est décomposée en trois zones distinctes (cf. Fig. 4.2).

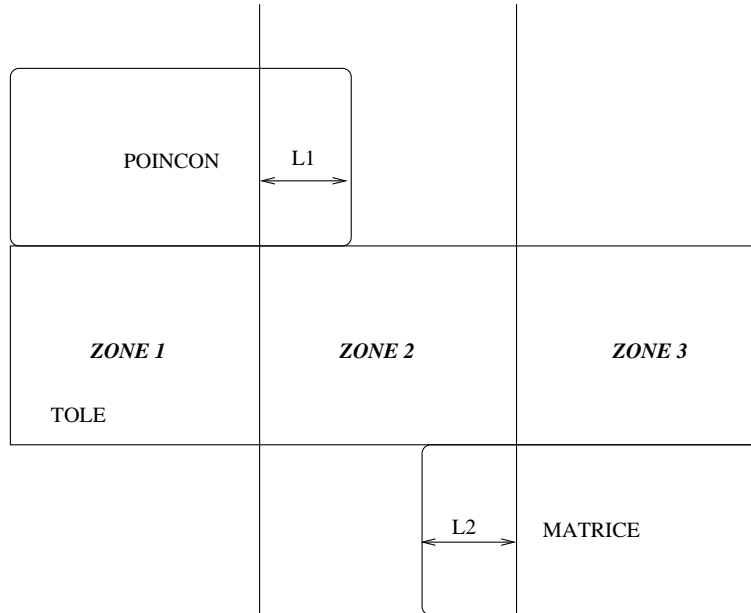


FIG. 4.2 – Décomposition de la pièce à mailler en trois zones.

Les zones 1 et 3 sont maillées grossièrement, car les déformations y sont limitées. Pour ces zones, une taille de maille globale égale à la moitié de l'épaisseur s'avère suffisante. La zone 2 doit clairement être affinée. Une taille globale égale à la moitié du plus petit rayon d'outil (poinçon ou matrice) est retenue. Cependant, lorsque la pénétration du poinçon dans la tôle augmente, la distance entre le poinçon et la matrice diminue, et la taille de maille peut s'avérer inadéquate. Le maillage est alors adapté pour disposer d'un nombre suffisant d'éléments entre les outils. Les distances L_1 et L_2 définissant la largeur de la zone à raffiner seront en pratique choisies égales à la valeur du jeu poinçon-matrice.

Concernant le type d'éléments utilisé, puisque le maillage est possible en triangles et en quadrilatères, les deux possibilités sont implémentées. Le choix du type d'élément est effectué au début du calcul. Par ailleurs, si l'on souhaite utiliser des éléments quadratiques, tels que des triangles à 6 nœuds ou des quadrilatères à 8 nœuds, il faut intercaler une procédure d'ajout de nœuds entre l'étape de génération du maillage et la reprise du calcul. Celle-ci est aisée à mettre en place, puisqu'elle nécessite uniquement d'ajouter des nœuds au milieu de chaque arête d'un élément triangle ou quadrilatère.

Remarque

Les paramètres de taille de maille ont été donnés ici pour le cas du découpage. D'autres procédures de détermination automatique des tailles de maille ont été développées, pour permettre l'utilisation de l'algorithme de remaillage sur d'autres types d'essais. Elles seront présentées dans le chapitre 5 traitant des tests de validation.

4.2.5 Transfert des conditions aux limites

Il s'agit d'une opération importante puisqu'elle conditionne le bon déroulement du calcul. Pour le cas du découpage que nous traiterons (découpage 2D en déformations planes ou axisymétrique), les conditions aux limites sont les conditions de symétrie axiale (une partie des déplacements est nulle sur l'axe de symétrie), le cas échéant des déplacements fixés sur les bords de la tôle, et des efforts simulant la pression du serre flan (cf. Fig. 4.3).

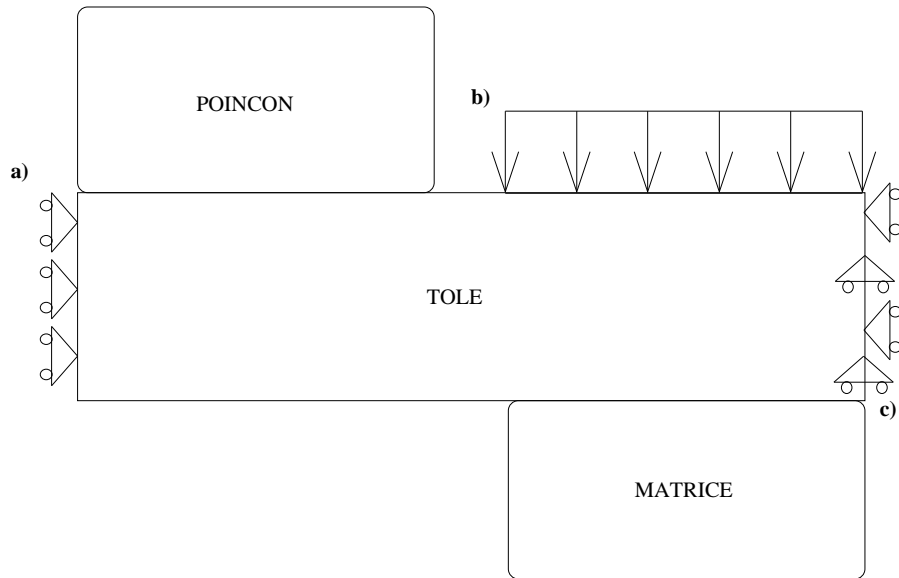


FIG. 4.3 – Conditions aux limites possibles en découpage. a) Conditions de symétrie, b) Effort de serrage, c) Eventuellement, conditions en déplacement sur le bord de la tôle.

Dans les exemples de découpage que nous avons traités, seules les conditions aux limites dues à la symétrie sont à transférer. Comme cela sera explicité par la suite, la stratégie de gestion de l'effort serre flan ne nécessite pas de transfert d'efforts nodaux. Quant au bord extérieur, il sera laissé libre dans notre cas. Le transfert des seules conditions aux limites de symétrie ne pose donc pas de problème particulier.

Cependant, afin de permettre l'utilisation du remaillage automatique pour d'autres applications, le transfert des conditions aux limites dans le cas général est également traité. La stratégie de transfert est alors la suivante :

- Pour un nœud M du contour dans le nouveau maillage, on recherche son arête d'appartenance L dans l'ancien maillage.
- Si les deux nœuds situés à l'extrémité de l'arête L ont une condition aux limites non nulle, alors la moyenne barycentrique de ces deux conditions est imposée à M .
- Si les deux nœuds situés à l'extrémité de l'arête L ont une condition aux limites nulle, alors la condition imposée à M est nulle également.
- Dans tous les autres cas, M est laissé libre.

Le transfert des conditions aux limites correspond en fait au transfert de la mise en données du problème de l'ancien vers le nouveau maillage. Le second transfert important dans la mise en place d'un algorithme de remaillage concerne le transport des champs calculés aux nœuds et aux points de Gauss.

4.2.6 Transport des champs nodaux

On note en majuscule les termes relatifs au nouveau maillage. Les termes relatifs à l'ancien maillage sont notés en minuscule. Soit M un point du nouveau maillage. e est l'élément d'appartenance de M dans l'ancien maillage et i représente un nœud quelconque de e (cf. Fig. 4.4).

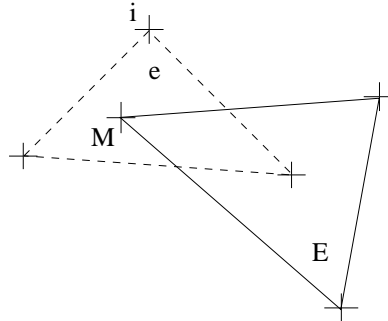


FIG. 4.4 – Le nœud M de l'élément E du nouveau maillage est situé dans e , élément de l'ancien maillage.

Soit V la valeur d'un champ quelconque, V_M étant la valeur prise en M . L'interpolation de ce champ est définie sur l'ancien maillage par :

$$V_M = \sum_{i=1}^n N_i(r_M, s_M) V_i \quad (4.17)$$

où $N_i(r_M, s_M)$ est la valeur de la fonction d'interpolation N_i au point M de coordonnées, dans l'élément de référence, (r_M, s_M) . V_i est la valeur de V en i . n est le nombre de nœuds de l'élément e .

Les valeurs nodales V_i étant connues, il suffit donc de calculer les coordonnées r_M, s_M de M dans e .

Les fonctions de forme étant les mêmes que pour l'interpolation géométrique, on a :

$$x_M = \sum_{i=1}^n N_i(r_M, s_M) x_i \quad \text{et} \quad y_M = \sum_{i=1}^n N_i(r_M, s_M) y_i \quad (4.18)$$

où x_M, y_M représentent les coordonnées du point M . Ces coordonnées étant connues, il s'agit donc de résoudre un système de deux équations à deux inconnues r_M et s_M . Cette résolution est effectuée par une méthode de Newton.

On note :

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r = \begin{bmatrix} r_M \\ s_M \end{bmatrix}$$

avec

$$F_x = \sum_{i=1}^n N_i(r_M, s_M) x_i - x_M \quad \text{et} \quad F_y = \sum_{i=1}^n N_i(r_M, s_M) y_i - y_M \quad (4.19)$$

Il s'agit de déterminer r tel que $F(r) = 0$. La méthode de Newton donne l'approximation r^{k+1} de r par :

$$r^{k+1} = r^k - [J(r^k)]^{-1} F(r^k) \quad (4.20)$$

avec

$$J(r) = \nabla F(r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial r} & \frac{\partial F_x}{\partial s} \\ \frac{\partial F_y}{\partial r} & \frac{\partial F_y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Les différentes étapes du transport des champs nodaux sont résumées Tab. 4.1.

- | |
|---|
| 1- Recherche de l'élément d'appartenance de M dans l'ancien maillage.
2- Calcul des coordonnées r_M, s_M .
3- Calcul de $N_i(r_M, s_M)$.
4- Calcul de V_M à l'aide de (4.17). |
|---|

TAB. 4.1 – Les étapes du transport des champs nodaux.

4.2.7 Transport des champs aux points de Gauss

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce type de problème. La stratégie retenue est résumée Fig. 4.5.

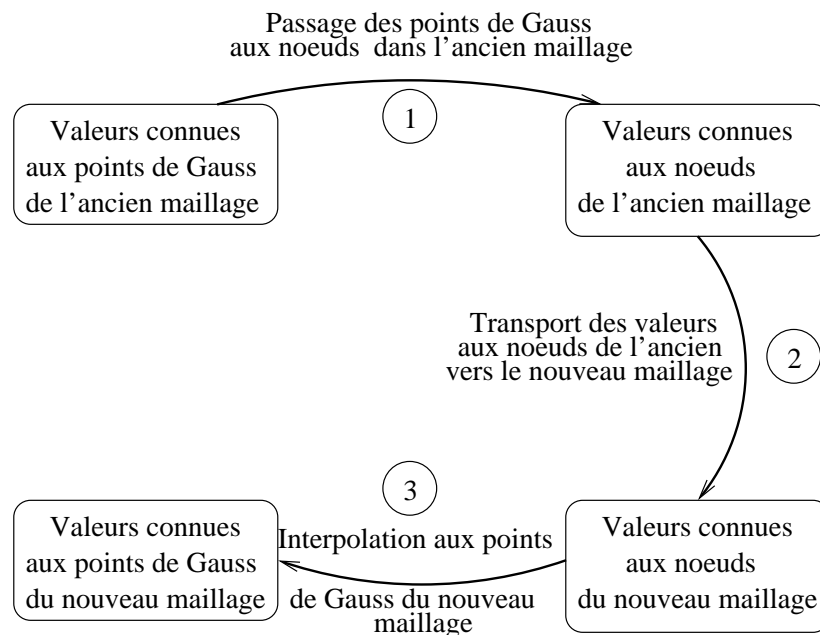


FIG. 4.5 – Méthode de transport des champs aux points de Gauss.

La seconde étape est la même que précédemment, à savoir le transport des champs nodaux d'un maillage à l'autre. La troisième étape consiste à interpoler sur le nouveau maillage les valeurs aux points de Gauss à partir des valeurs aux noeuds. En revanche, la première étape nécessite une plus grande attention. Il s'agit de déterminer les valeurs nodales sur l'ancien maillage à partir des valeurs aux points de Gauss.

Soit un élément e contenant n nœuds et p points de Gauss. La valeur d'un champ V est interpolée en chaque point de Gauss m par :

$$V_g(m) = \sum_{i=1}^n N_i(r_m, s_m) V_n(i) \quad (4.22)$$

où les indices g et n signifient 'au point de Gauss' et 'au nœud', respectivement. Nous avons un système de p équations linéaires à n inconnues (les $V_n(i)$). 3 cas sont alors possibles :

- Si $p = n$, alors on obtient directement les valeurs nodales par résolution du système (4.22).
- Si $p > n$, le système précédent est résolu par une approximation aux moindres carrés. On définit la fonctionnelle à minimiser par :

$$\phi(V_n(1), V_n(2), \dots, V_n(n)) = \sum_{m=1}^p \left(\sum_{i=1}^n N_i(m) V_n(i) - V_g(m) \right)^2 \quad (4.23)$$

Une condition nécessaire pour minimiser ϕ est que toutes ses dérivées partielles par rapport à $V_n(l)$ soient nulles :

$$\frac{\partial \phi}{\partial V_n(l)} = \sum_{m=1}^p 2N_l(m) \left(\sum_{i=1}^n N_i(m) V_n(i) - V_g(m) \right) \quad (4.24)$$

Ce qui fournit n équations (les n dérivées partielles de ϕ), pour n inconnues. Après quelques développements, nous obtenons le système matriciel suivant à résoudre :

$$A V = B \quad (4.25)$$

La composante (ij) de la matrice carrée A est définie par :

$$A_{ij} = \sum_{m=1}^p N_i(m) N_j(m) \quad (4.26)$$

Le vecteur V s'écrit :

$$V = [V_n(1) V_n(2) \cdots V_n(n)]^T \quad (4.27)$$

Enfin, la composante (i) du vecteur B est définie par :

$$B_i = \sum_{m=1}^p N_i(m) V_g(m) \quad (4.28)$$

Ce qui permet, par inversion de la matrice carrée, d'obtenir les valeurs nodales de V .

- Si $p < n$, on approxime les valeurs nodales par :

$$V_n(i) = \sum_{k=1}^p N_i(k) z_k \quad (4.29)$$

Ce qui revient à affecter un poids z_k en chacun des p points de Gauss. On remplace donc la recherche de n inconnues $V_n(i)$ par celle des p inconnues z_k .

En reprenant l'équation (4.22) et en remplaçant $V_n(i)$ par son expression, on obtient :

$$V_g(m) = \sum_{i=1}^n N_i(m) \sum_{k=1}^p N_i(k) z_k \quad (4.30)$$

D'où le système matriciel suivant :

$$A' Z = B' \quad (4.31)$$

La composante (ij) de la matrice carrée A' est définie par :

$$A'_{ij} = \sum_{l=1}^n N_l(i) N_l(j) \quad (4.32)$$

Le vecteur Z s'écrit :

$$Z = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_p]^T \quad (4.33)$$

Enfin, la composante (i) du vecteur B' est définie par :

$$B'_i = V_g(i) \quad (4.34)$$

Ce qui permet d'obtenir les z_k , puis les $V_n(i)$ avec la relation (4.29).

Une fois connues les valeurs aux nœuds sur l'ancien maillage, il est possible de les transférer aux nœuds du nouveau maillage via la relation (4.17). Il ne reste plus qu'à interpoler les valeurs aux points de Gauss du nouveau maillage. En repassant par l'élément de référence, on obtient finalement :

$$V_g(K) = \sum_{I=1}^N N_I(r_K, s_K) V_n(I) \quad (4.35)$$

Les tests de validation présentés au chapitre suivant montreront l'efficacité de ce type de transport des champs.

4.2.8 Rééquilibrage de la structure

Une fois transférés tous les champs, la structure n'est évidemment plus en équilibre, du fait des approximations faites au cours du transfert des champs. On a en particulier un champ de contraintes différent de celui avant remaillage. Il faut donc effectuer un pas de calcul "à vide", c'est-à-dire sans modification de chargement, ceci afin de rééquilibrer la structure.

4.2.9 Bilan

La discrétisation spatiale du problème a été présentée. Du fait des grandes déformations intervenant en découpage, celle-ci constitue un point critique de la modélisation. C'est la raison pour laquelle un algorithme de remaillage a été développé. Celui-ci permet de maintenir une bonne qualité géométrique des éléments, et par la suite

d'éviter une dégradation de la solution. Le choix a été fait d'effectuer un remaillage global soit à intervalles réguliers, soit lorsque la qualité géométrique de certains éléments devient critique. La définition du nouveau maillage repose alors sur les nœuds du contour de l'ancien maillage.

Une des principales étapes du remaillage est le transfert des champs de l'ancien vers le nouveau maillage. La méthodologie retenue a été développée. Le transfert des valeurs nodales est effectué par une technique d'interpolation à l'aide des fonctions de forme. Le transfert des champs définis aux points de Gauss est réalisé quant à lui par extrapolation des champs aux nœuds de la structure, puis interpolation des valeurs nodales ainsi calculées aux points de Gauss du nouveau maillage.

L'organigramme présenté Fig. 4.6 résume les différentes étapes de l'algorithme de remaillage.

Le deuxième aspect de la discrétisation du problème continu concerne la discrétisation dans le temps. Ce point est l'objet de la section suivante.

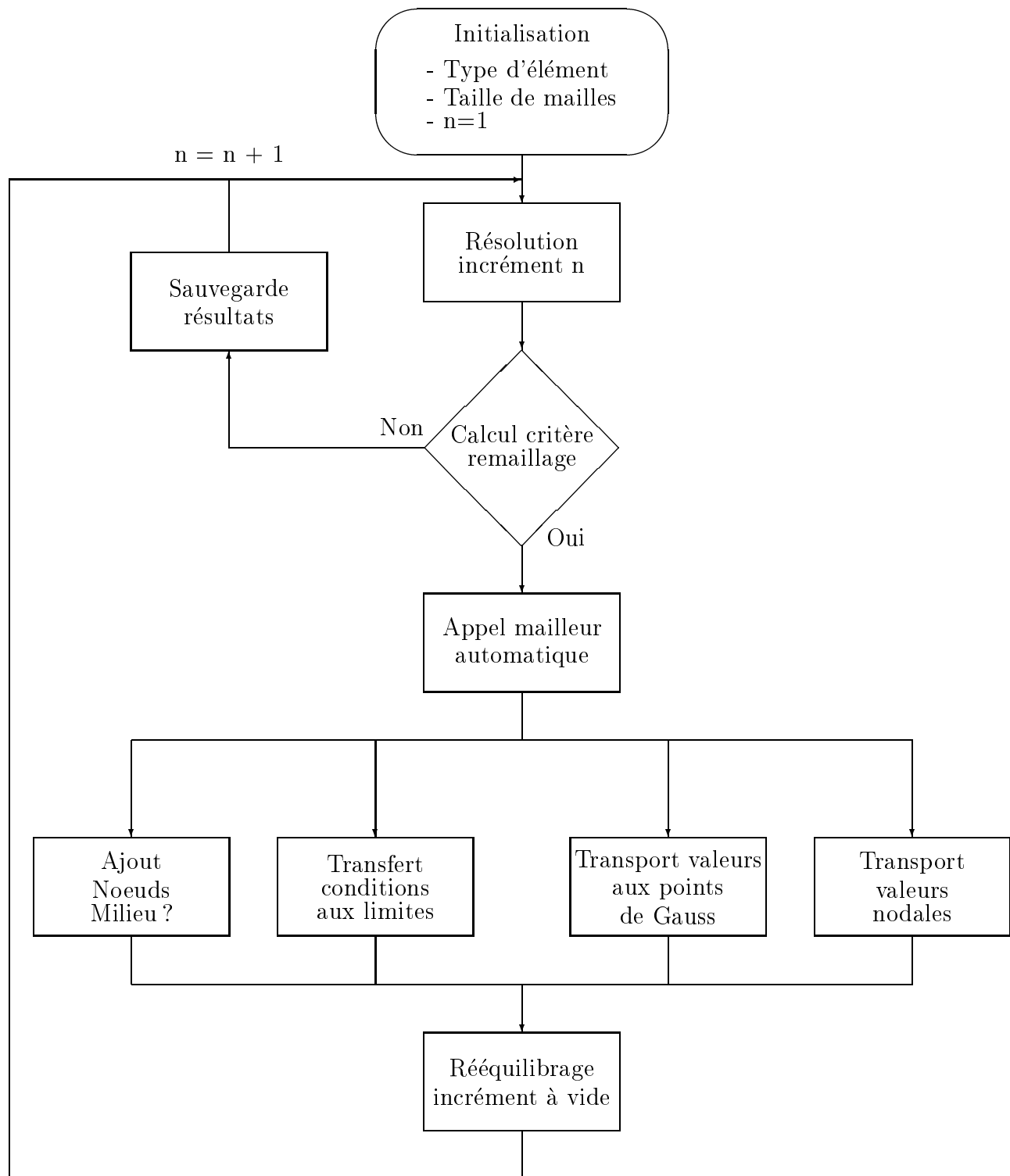


FIG. 4.6 – Algorithme de remaillage.

4.3 Intégration temporelle

4.3.1 Introduction

Pour discrétiser dans le temps l'équation (4.11), deux grandes classes d'algorithmes sont utilisées dans la pratique, à savoir les algorithmes implicites et les algorithmes explicites. Les références (Staub, 1998; Boulmane, 1994; Belytschko *et al.*, 2000) exposent en détail les algorithmes les plus couramment utilisés.

Il a été montré au chapitre 3 que les effets d'inertie n'influencent pas l'opération de découpage. Ainsi, ce procédé peut être vu comme un procédé quasi-statique. Pour résoudre ce type de problème, il est courant d'utiliser un algorithme de type quasi-statique implicite, dans lequel le problème non linéaire est remplacé par un système d'équations linéaires résolu par une méthode de type Newton. C'est la première méthode envisagée dans ces travaux. Cependant, l'inconvénient majeur réside dans le fait que ce type d'algorithme peut être mis en défaut dans les problèmes fortement non linéaires, comme c'est le cas en découpage.

On peut alors envisager un algorithme de type dynamique explicite, dans lequel la solution est obtenue pas à pas explicitement, ce qui évite une résolution itérative du problème et les difficultés de convergence qui lui sont associées.

Dans les présents travaux, les deux approches ont été traitées. Le programme sur lequel sont basés ces développements dispose en effet d'un algorithme de type quasi-statique implicite. Les simulations effectuées sur le découpage ayant montré les possibilités de divergence d'un tel schéma, le développement d'un algorithme dynamique explicite nous est apparu intéressant.

Dans cette section, les deux algorithmes sont présentés, sans le traitement du contact, qui interviendra dans la section 4.4.

4.3.2 Méthode implicite

Système d'équations

Si l'on néglige les termes inertiels, et si l'on suppose que les efforts extérieurs ne dépendent pas du déplacement du solide, l'équation (4.11) s'écrit :

$$\boxed{R(u) = 0 = F_{ext} - F_{int}(u)} \quad (4.36)$$

où $R(u)$ représente le résidu des efforts nodaux.

Ce système d'équations est en général non linéaire, du fait des non linéarités matérielles intervenant dans l'expression de F_{int} . Pour le résoudre, on le linéarise en utilisant la méthode de Newton-Raphson. Celle-ci consiste à subdiviser le chargement total en N incréments de chargement. Sur chaque incrément n , la méthode de Newton est alors appliquée.

Pour ne pas alourdir l'écriture, la référence à l'incrément n n'est pas précisée. La méthode de Newton étant itérative, on note $i + 1$ l'itération courante.

Le système se linéarise selon :

$$\frac{\partial R(u^i)}{\partial u}(u^{i+1} - u^i) = -R(u^i) \quad (4.37)$$

Ceci revient à effectuer un développement limité de Taylor d'ordre 1 au voisinage de u^{i+1} .

Or :

$$\frac{\partial R(u^i)}{\partial u} = -\frac{\partial F_{int}(u^i)}{\partial u} = -K(u^i) \quad (4.38)$$

où $K(u^i) = \frac{\partial F_{int}(u^i)}{\partial u}$ est la matrice de raideur tangente du système.

D'où :

$$K(u^i) \Delta u^i = R(u^i) \quad (4.39)$$

où $\Delta u^i = u^{i+1} - u^i$ est la correction itérative de déplacement.

La résolution de ce système d'équations linéaires fournit Δu^i :

$$\Delta u^i = [K(u^i)]^{-1} R(u^i) \quad (4.40)$$

Puis le vecteur déplacement nodal actualisé :

$$u^{i+1} = u^i + \Delta u^i \quad (4.41)$$

Pour stopper la procédure itérative, on considère un critère d'arrêt basé sur la valeur du résidu des efforts nodaux. Pour cela, on calcule :

$$\|R(u^i)\| = \sqrt{\sum_k (R_k)^2} \quad (4.42)$$

où R_k représente la composante k du vecteur global $R(u^i)$.

De même, on écrit que :

$$\|F_{ext}\| = \sqrt{\sum_p (F_{ext}^p)^2} \quad (4.43)$$

où les efforts F_{ext}^p sont calculés à partir des réactions nodales.

La procédure itérative est arrêtée dès que :

$$\frac{\|R(u^i)\|}{\|F_{ext}\|} < \varepsilon \quad (4.44)$$

Dans notre cas $\varepsilon = 10^{-3}$.

La résolution du système (4.39) nécessite la détermination de $K(u^i)$. Celle-ci est détaillée dans la sous-section suivante.

Détermination de la matrice de raideur tangente

Pour calculer ce terme, il s'agit de différencier F_{int} , c'est-à-dire d'écrire que :

$$\partial F_{int} = \frac{\partial F_{int}}{\partial u} \partial u \quad (4.45)$$

Ce qui revient à calculer \dot{F}_{int} tel que :

$$\dot{F}_{int} = \frac{\partial F_{int}}{\partial u} \dot{u} \quad (4.46)$$

La première expression relie des quantités infinitésimales, la seconde des taux de variations. Nous choisirons plutôt la seconde notation pour des raisons de clarté dans les notations.

Pour effectuer la dérivation, il est plus judicieux de se placer dans la configuration initiale (description lagrangienne). En effet, si on utilise une description eulérienne, l'expression est plus complexe dans la mesure où les termes dépendant du déplacement sont plus nombreux, notamment le domaine d'intégration.

Nous reprenons l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs sous la forme suivante :

$$\delta P_{int} = \int_{\Omega_0} \underline{T} : \delta \dot{\underline{F}} dV_0$$

Le calcul de la différentielle de cette fonction ne pose pas de problème particulier puisque seul \underline{T} dépend de la variation de déplacement. Donc :

$$\delta \dot{P}_{int} = \int_{\Omega_0} \dot{\underline{T}} : \delta \dot{\underline{F}} dV_0 \quad (4.47)$$

Le tenseur de Kirchhoff $\underline{\tau}$ est relié à \underline{T} par la relation :

$$\underline{\tau} = \underline{T} \underline{F}^T \quad (4.48)$$

Soit, en dérivant :

$$\dot{\underline{\tau}} = \dot{\underline{T}} \underline{F}^T + \underline{T} [\dot{\underline{F}}]^T \quad (4.49)$$

d'où :

$$\dot{\underline{T}} = \left(\dot{\underline{\tau}} - \underline{T} [\dot{\underline{F}}]^T \right) \underline{F}^{-T} \quad (4.50)$$

et comme $\dot{\underline{F}} = \underline{L} \underline{F}$:

$$\dot{\underline{T}} = \left(\dot{\underline{\tau}} - \underline{T} \underline{F}^T \underline{L}^T \right) \underline{F}^{-T} = \left(\dot{\underline{\tau}} - \underline{\tau} \underline{L}^T \right) \underline{F}^{-T} \quad (4.51)$$

Ce qui s'écrit, en faisant intervenir la dérivée de Lie de $\underline{\tau}$:

$$\dot{\underline{T}} = (\underline{\tau}^c + \underline{L} \underline{\tau}) \underline{F}^{-T} \quad (4.52)$$

En substituant ce résultat dans (4.47) :

$$\delta \dot{P}_{int} = \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}^c + \underline{L} \underline{\tau}) \underline{F}^{-T} : \delta \dot{\underline{F}} dV_0 \quad (4.53)$$

Par ailleurs, $\delta \dot{\underline{F}} = \delta \underline{L} \underline{F}$, donc :

$$\delta \dot{P}_{int} = \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}^c + \underline{L} \underline{\tau}) \underline{F}^{-T} : \delta \underline{L} \underline{F} dV_0 \quad (4.54)$$

Sachant que $\underline{A} : \underline{B} \underline{C} = \underline{A} \underline{C}^T : \underline{B}$ et $\underline{A} : \underline{B} \underline{C} = \underline{B} : \underline{C} \underline{A}$, on obtient finalement :

$$\delta \dot{P}_{int} = \int_{\Omega_0} \underline{\tau}^c : \underline{\delta L} dV_0 + \int_{\Omega_0} \underline{L} : \underline{\tau} \underline{\delta L} dV_0 \quad (4.55)$$

Le transport de $\delta \dot{P}_{int}$ dans la configuration courante permet d'écrire :

$$\delta \dot{P}_{int} = \int_{\Omega_t} \underline{\tau}^c : \underline{\delta L} J dV_t + \int_{\Omega_t} \underline{L} : \underline{\tau} \underline{\delta L} J dV_t \quad (4.56)$$

Si l'on considère à l'instant t que la configuration courante coïncide avec la configuration de référence, on a alors $\underline{F} = \underline{1}$, $J = 1$ et $\underline{\tau} = \underline{\sigma}^4$. D'où :

$$\delta \dot{P}_{int} = \int_{\Omega_t} \underline{\tau}^c : \underline{\delta L} dV_t + \int_{\Omega_t} \underline{L} : \underline{\sigma} \underline{\delta L} dV_t \quad (4.57)$$

Ce choix particulier pour la configuration de référence suppose que la géométrie, donc les coordonnées des nœuds du maillage, soient réactualisées tout au long du calcul.

Enfin, du fait de la symétrie de $\underline{\tau}^c$, on obtient :

$$\boxed{\delta \dot{P}_{int} = \int_{\Omega_t} \underline{\tau}^c : \underline{\delta D} dV_t + \int_{\Omega_t} \underline{L} : \underline{\sigma} \underline{\delta L} dV_t} \quad (4.58)$$

On introduit la loi de comportement sous la forme :

$$\underline{\tau}^c = \underline{\underline{C}} : \underline{D} \quad (4.59)$$

où $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur du quatrième ordre appelé opérateur tangent.

La discrétisation par éléments finis donne alors :

$$\delta \dot{P}_{int} = \delta v^T \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} B^T C B dV_t v + \delta v^T \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} \nabla N^T \sigma \nabla N dV_t v \quad (4.60)$$

où v représente le vecteur vitesse nodale pour l'ensemble de la structure. L'opérateur ∇N représente la matrice gradient des fonctions d'interpolation telle que $L = \nabla N v$.

La relation (4.60) fournit la matrice de raideur tangente :

$$\boxed{K = K_{mat} + K_{geo}} \quad (4.61)$$

avec :

$$\boxed{K_{mat} = \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} B^T C B dV_t} \quad (4.62)$$

et

$$\boxed{K_{geo} = \bigcup_{elts} \int_{\Omega_t^e} \nabla N^T \sigma \nabla N dV_t} \quad (4.63)$$

K_{mat} est la matrice de raideur matérielle et K_{geo} la matrice de raideur géométrique. Pour le calcul de K , on peut noter que le seul terme non défini pour le moment est

⁴En revanche, les taux de variation de contraintes ne sont pas identiques.

```

1- Initialisation :
   incrément  $n = 1$ , itération  $i = 0$ .
    $u_n^i = 0$ ,  $\sigma_n^i = \sigma_0$ .
2- Si  $n = 1$  :
    $K_n^i = K_{mat}^0 + K_{geo}^0$ 
   avec  $K_{mat}^0 = K^e$  (matrice de raideur élastique)
    $R_n^i = (F_{ext})_n - F_{int}(u_n^i) = R^0$ 
   Aller en 7.
Si  $n \neq 1$  :
    $K_n^i = K_{n-1}$ 
    $R_n^i = R_{n-1}$ 
   Aller en 7.
3- Calcul de  $\sigma_n^i$ .
4- Calcul et assemblage de  $K_n^i = K(u_n^i)$ .
5- Calcul et assemblage de  $(F_{ext})_n$  et  $F_{int}(u_n^i)$ .
   Calcul de  $R_n^i$ .
6- Prise en compte des conditions aux limites
   (par pénalisation).
7- Résolution de  $K_n^i \Delta u_n^i = R_n^i$ .
8- Mise à jour de  $u_n^{i+1} = u_n^i + \Delta u_n^i$ .
9- Test de convergence :
   Si  $\frac{\|R(u_n^{i+1})\|}{\|F_{ext}\|} < Tolerance$  aller en 10.
   Sinon  $i = i + 1$  et retour en 3.
10-  $n = n + 1$ ,  $i = 0$ .
   Si le calcul n'est pas terminé aller en 2.
   Sinon FIN.

```

TAB. 4.2 – Algorithme de la méthode de Newton-Raphson.

l'opérateur tangent C . Celui-ci sera explicité dans l'algorithme de calcul des contraintes lors de l'intégration numérique des lois de comportement.

L'algorithme quasi-statique implicite est résumé Tab. 4.2.

Remarques

La résolution du système (4.39) nécessite en théorie l'inversion de la matrice de raideur tangente. En pratique, ce système d'équations linéaires est résolu par une méthode de Choleski. La matrice K symétrique définie positive est décomposée en $K = LL^T$, où L est une matrice triangulaire inférieure. Le système est résolu en trois étapes :

- Décomposition de la matrice K .
- Résolution de $Ly = R$ et obtention de y .
- Résolution de $L^T \Delta u = y$ et obtention de Δu .

Le stockage de la matrice de raideur est un point crucial dans le développement de tels algorithmes. Il conditionne largement le temps de calcul. Le stockage proposé dans la version initiale du programme est un stockage en ligne de ciel. Celui-ci s'avère efficace si la largeur de bande de la matrice K est réduite. Pour diminuer la largeur de bande, un

algorithme de renumérotation des nœuds basé sur la méthode de Cuthill Mc-Kee a été utilisé. Dans la mesure où il n'est pas toujours possible d'obtenir une largeur de bande satisfaisante pour K , nous avons également envisagé un stockage de type 'sparse', dans lequel seuls les termes non nuls de la matrice K sont stockés. Celui-ci nécessite le stockage de deux tableaux supplémentaires, contenant d'une part l'indice de colonne de chacun des termes et d'autre part la position des premiers termes de chaque ligne. Il nécessite en outre la réécriture de la décomposition de Choleski pour des matrices de type sparse. Le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes est effectué au début d'une simulation, en fonction de leur rapidité respective constatée.

4.3.3 Méthode explicite

Système d'équations

La méthode explicite choisie est la méthode des différences finies centrées. Ce choix est motivé par la simplicité de mise en œuvre, et parce que les nombreuses utilisations de celle-ci ont montré qu'elle était efficace pour traiter des problèmes tels que le découpage des métaux.

Si on écrit l'équation (4.11) à l'instant t_n , l'accélération peut être calculée par :

$$a_n = M_n^{-1} (F_n^{ext} - F^{int}(u_n)) \quad (4.64)$$

La solution est alors calculée à chaque pas de temps selon le schéma suivant :

$$\begin{cases} v_{n+\frac{1}{2}} = v_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t a_n \\ u_{n+1} = u_n + \Delta t v_{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.65)$$

Nous allons détailler dans la suite de cette section les points importants intervenant dans la mise en œuvre numérique de cette méthode.

Initialisation du schéma

L'écriture (4.65) montre qu'il faut initialiser les valeurs de u_0 et $v_{-\frac{1}{2}}$. Or, à $t = 0$, on a $u_0 = 0$. L'équation (4.64) permet d'écrire que :

$$a_0 = M_0^{-1} (F_0^{ext} - F^{int}(u_0)) \quad (4.66)$$

Et la combinaison des deux équations du système (4.65) donne l'expression de $v_{-\frac{1}{2}}$:

$$v_{-\frac{1}{2}} = \frac{u_1 - u_0}{\Delta t} - \Delta t a_0 \quad (4.67)$$

avec u_1 déplacement imposé au premier pas de temps.

Diagonalisation de la matrice masse

Pour conserver toute l'efficacité de la méthode explicite, il faut éviter d'avoir à inverser la matrice masse pour calculer l'accélération. Pour cela, on procède en général à la diagonalisation de cette matrice. Plusieurs méthodes ont été proposées pour effectuer cette opération. Nous retenons ici la méthode dite "Special Lumping Technique", Boulmane

(1994). La concentration des valeurs aux nœuds est faite de telle sorte qu'elle conserve la masse totale de l'élément. L'expression générale des termes diagonaux non nuls est alors :

$$M_{ii} = \frac{\int_{\Omega} \rho dV}{\sum_k \int_{\Omega} N_k \rho N_k dV} \int_{\Omega} N_i \rho N_i dV \quad (4.68)$$

Estimation du pas de temps

C'est une étape particulièrement importante puisqu'elle conditionne d'une part la stabilité de la méthode, et d'autre part le temps global de calcul. Le pas de temps doit être recalculé à chaque pas de calcul, car il dépend directement de la taille des éléments du maillage (en l'occurrence, la taille du plus petit élément), et va donc varier avec la déformation.

Boulmane indique que l'on peut généraliser le calcul du pas de temps fait dans le cas d'éléments simples de type barre à d'autres éléments, en particulier aux éléments triangulaires. L'estimation de ce pas de temps est obtenue par l'expression suivante :

$$\Delta t_{cr} = \frac{L}{c} \quad (4.69)$$

où L est la longueur de la barre, et c la vitesse de propagation d'onde élastique définie par :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}} \quad (4.70)$$

Pour des éléments triangulaires, la vitesse de propagation d'onde est toujours calculée selon (4.70). Pour la longueur, on calcule la hauteur de chaque triangle et la plus petite de ces hauteurs définit la longueur minimale. Boulmane (1994), Staub (1998) indiquent qu'il est nécessaire, pour conserver la stabilité de la méthode, d'introduire un coefficient α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$, de telle sorte que le pas de temps critique estimé ait pour expression :

$$\Delta t_{cr} = \alpha \frac{L_{min}}{c} \quad (4.71)$$

Concrètement, l'utilisation d'éléments quadratiques et la prise en compte des contacts nécessitent de prendre un pas de temps encore plus petit. Boulmane indique que l'utilisation d'un coefficient $\alpha = 0.65$ permet de conserver la stabilité du schéma dans ces conditions. C'est la valeur que nous prendrons pour nos calculs⁵.

L'algorithme général de la méthode des différences centrées est résumé Tab. 4.3.

4.3.4 Bilan

Les deux algorithmes utilisés dans ces travaux ont été présentés. Les spécificités de chacune des méthodes ont été discutées. Pour l'algorithme implicite, le point essentiel est

⁵On peut éventuellement envisager, pour augmenter le pas de temps, des méthodes numériques telles que l'augmentation artificielle de la masse des plus petits éléments. Cette méthode est employée dans certains programmes commerciaux. Ce type de traitement n'est pas considéré ici. Il importe donc de veiller à ce qu'aucun élément du maillage ne soit dégénéré au cours du calcul.

1- Initialisation de u_0 , a_0 et $v_{-\frac{1}{2}}$
2- Estimation du pas de temps Δt_{cr} Incrémentation temporelle : $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{cr}$
3- Calcul de la matrice M diagonale
4- Calcul de F_n^{ext} et $F^{int}(u_n)$
5- Calcul des accélérations : $a_n = M_n^{-1} (F_n^{ext} - F^{int}(u_n) - C_n v_n)$
6- Actualisation des vitesses et des déplacements : $v_{n+\frac{1}{2}} = v_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t a_n$ $u_{n+1} = u_n + \Delta t v_{n+\frac{1}{2}}$

TAB. 4.3 – Algorithme de la méthode des différences finies centrées.

la détermination de la matrice de raideur tangente. Par ailleurs, la méthode de résolution du système linéaire doit être examinée avec attention afin de diminuer le temps de calcul. Pour la méthode des différences finies centrées, la diagonalisation de la matrice masse et le calcul du pas de temps constituent des éléments particulièrement importants, puisqu'ils conditionnent le temps de calcul.

Rappelons que l'algorithme implicite développé ici est inconditionnellement stable, c'est-à-dire que la solution n'est pas dégradée par l'utilisation d'un incrément de chargement important. Le temps de calcul est donc directement proportionnel à la taille de la matrice K , c'est-à-dire au nombre de ddls de la structure par conséquent au nombre de nœuds. L'algorithme dynamique explicite est en revanche conditionnellement stable et nécessite un pas de temps très faible. Le temps de calcul est donc lié à la taille du plus petit élément.

Jusqu'à présent, nous avons traité les équations d'équilibre sans tenir compte du contact et du frottement qui interviennent entre les outils et la tôle. La prise en compte de ces conditions est explicitée dans la section suivante.

4.4 Gestion du contact unilatéral avec frottement

Dans cette section, nous allons détailler le traitement du contact unilatéral avec frottement. Les développements effectués dans le cadre de ces travaux concernent le cas de l'algorithme dynamique explicite. Par conséquent, pour l'algorithme quasi-statique implicite, nous nous limiterons à exposer les principales étapes de la méthode, sans entrer dans le détail des développements. De plus amples informations sont disponibles dans Baba (1997), Boulmane (1994).

4.4.1 Traitement du contact

Modélisation des outils

Dans le cas du découpage, il est nécessaire de modéliser le(s) poinçon(s), la(les) matrice(s) et le(s) serre(s) flan. Le choix est fait de définir géométriquement les outils, poinçon et matrice, par des segments de droite, y compris pour les rayons d'outils. Cette définition

simplifie le traitement du contact sans perdre en précision si les rayons sont finement discrétisés (en pratique, au moins quatre segments de droite par rayon).

En règle générale, le serre flan, dans la phase de découpage, exerce une pression sur la tôle par l'intermédiaire de ressorts de compression. Cet effort permet de retenir la tôle et de la maintenir sur la matrice. Plutôt que de modéliser explicitement cet effort de serrage, on utilisera un modèle simplifié dans lequel le serre flan est représenté par un segment de droite infranchissable par les nœuds de la tôle. On impose d'une certaine façon un blocage en déplacement à la tôle.

Condition d'impénétrabilité de la matière

Dans le chapitre 3, les inégalités fondamentales du problème de contact ont été rappelées. En particulier, la condition d'impénétrabilité stipule que la tôle ne peut pénétrer les outils. Les nœuds du maillage qui ne respecteraient pas cette condition doivent être ramenés à la surface de l'outil.

Soit M_t la position d'un nœud M susceptible d'entrer en contact avec un outil. Soit $M_{t+\Delta t}$ la position de ce nœud au pas de calcul suivant. Pour un nœud ayant pénétré un outil, nous aurons le cas de figure présenté Fig. 4.7.

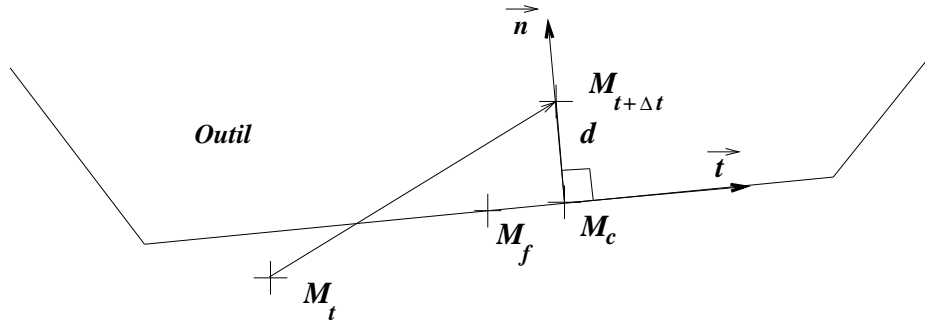


FIG. 4.7 – Représentation d'un nœud pénétrant un outil à l'instant $t + \Delta t$.

Les nœuds en contact sont traités dans le repère local (\vec{n}, \vec{t}) . Le nœud $M_{t+\Delta t}$ est ramené par projection orthogonale sur l'outil, au point M_c . Le déplacement suivant \vec{n} dû à la condition de contact est noté d . Le point M_f de cette figure sera défini lors de la gestion du frottement.

Sur un pas de chargement, si un nœud devient intérieur à un outil, il est considéré comme étant en contact durant tout le pas de chargement.

Possibilité de décollement des nœuds

La seconde inégalité fondamentale rappelée dans le chapitre 3 traduit le fait qu'un nœud en contact peut décoller de la surface de l'outil. Pour vérifier cette condition, on examine le signe de la composante normale R_n de la réaction au nœud en contact avec un outil. Si R_n est telle que $R_n \geq 0$, le nœud est considéré comme ayant décollé de l'outil. Il n'est donc plus pris en compte au pas de calcul suivant.

Couplage avec l'algorithme implicite

Il s'agit ici de prendre en compte les déplacements imposés d_i par le contact, d_i étant le déplacement normal pour le nœud i en contact. Ceux-ci sont introduits dans la résolution

globale du système par pénalisation. A la première itération, le déplacement imposé est égal à d_i . Pour les autres itérations, on impose un déplacement normal nul au nœud, traduisant le fait que le nœud reste sur la surface de l'outil pendant tout l'incrément. Le décollement éventuel des nœuds en fin d'incrément permet de libérer les nœuds qui auraient tendance à décoller. Ceux-ci sont alors retirés de la liste des nœuds en contact. Ces décollements de nœuds déséquilibrent le système. Le calcul est donc poursuivi avec cette nouvelle liste de nœuds en contact jusqu'à obtenir un retour à l'équilibre global.

Notons que cet algorithme de contact constitue une approche simplifiée. En effet, la projection orthogonale interdit de prendre des pas de chargement trop grands pour éviter une projection sur une mauvaise arête de l'outil. Cependant, cet algorithme, présent dans la version initiale du programme, a été conservé en premier lieu pour des raisons de compatibilité. En outre, les exemples des chapitres 5 et 6 mettront en évidence que cet algorithme s'avère efficace pour des géométries d'outils assez simples.

Couplage avec l'algorithme explicite

Dans un premier temps, la solution en déplacement est calculée sans tenir compte des conditions de contact. A l'issue de cette étape, les nœuds ayant pénétré doivent être ramenés sur l'outil. La force que l'on doit appliquer pour effectuer cette projection orthogonale est telle que (Boulmane, 1994) :

$$\vec{F}_c = \frac{m d}{\Delta t^2} \vec{n} \quad (4.72)$$

où m est la masse nodale du nœud considéré.

En supposant un équilibre local du nœud, on peut écrire que (Boulmane, 1994) :

$$\vec{F}_c = m \vec{a}_c \quad (4.73)$$

\vec{a}_c représente la correction à apporter à l'accélération nodale pour ramener le nœud sur l'outil.

Les équations (4.72) et (4.73) impliquent que :

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{d}{\Delta t^2} \vec{n}} \quad (4.74)$$

L'étape de prise en compte des conditions de contact s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{a} = \vec{a} + \vec{a}_c \\ \vec{v} = \vec{v} + \Delta t \vec{a}_c \\ \vec{u} = \vec{u} + \Delta t^2 \vec{a}_c \end{cases}} \quad (4.75)$$

Dans le cas d'un algorithme d'intégration temporelle explicite, le pas de temps doit être choisi faible pour conserver la convergence de la méthode vers la solution recherchée. Par conséquent, dans ce cas, l'utilisation d'un algorithme de traitement du contact explicite par projection orthogonale s'avère efficace et robuste.

4.4.2 Traitement du frottement

La gestion du frottement est effectuée de façon explicite, elle est consécutive à l'étape de correction du contact.

Le point M_c obtenu après correction de contact occupera la position M_f après prise en compte des conditions de frottement, Fig. 4.7.

Le glissement \vec{g} du nœud est égal à :

$$\vec{g} = \vec{M_t M_c} - \left(\vec{M_t M_c} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \quad (4.76)$$

On peut calculer la force de résistance au glissement par :

$$\vec{F_g} = -\frac{m}{\Delta t^2} \vec{g} \quad (4.77)$$

Par ailleurs, en considérant une loi de frottement de type Coulomb, on obtient pour l'expression de la force critique de frottement :

$$F_{cr} = \mu |R_n| \quad (4.78)$$

où R_n est, comme précédemment, la composante normale de la réaction au nœud.

En supposant un équilibre local au nœud, et en considérant que les déplacements dus respectivement au comportement et au contact sont indépendants, on peut écrire que (Boulmane, 1994) :

$$F_{cr} = \mu m |a_n| \quad (4.79)$$

où a_n est l'accélération normale du nœud.

Par ailleurs, dans la mesure où la force tangentielle ne peut pas dépasser la force de frottement maximale, la force réelle de frottement F_f doit être telle que :

$$\vec{F_f} = \frac{\vec{F_g}}{|\vec{F_g}|} \min(F_{cr}, F_g) \quad (4.80)$$

En écrivant que :

$$\vec{F_f} = m \vec{a_f} \quad (4.81)$$

où $\vec{a_f}$ est la correction à apporter sur l'accélération pour tenir compte du frottement, on aboutit alors à :

$$\boxed{\vec{a_f} = -\frac{\vec{g}}{|g|} \min\left(\mu |a_n|, \frac{1}{\Delta t^2} |g|\right)} \quad (4.82)$$

On en déduit la correction due au frottement :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{a} = \vec{a} + \vec{a_f} \\ \vec{v} = \vec{v} + \Delta t \vec{a_f} \\ \vec{u} = \vec{u} + \Delta t^2 \vec{a_f} \end{cases}} \quad (4.83)$$

4.4.3 Bilan

La prise en compte des conditions de contact et de frottement a été brièvement présentée. La condition de non pénétrabilité est respectée par projection orthogonale des nœuds intérieurs sur le segment d'outil le plus proche. La possibilité de décollement des nœuds est vérifiée en fin d'incrément. Les nœuds ayant décollé ne sont plus pris en compte pour le contact au pas de calcul suivant. La gestion du frottement est effectuée de façon explicite, en utilisant une loi de frottement de type Coulomb. Puisque le découpage est simulé en deux dimensions uniquement, le problème du contact reste assez simple à traiter. Les algorithmes présentés sont donc suffisants pour représenter de façon réaliste le contact entre les outils et la tôle, comme les exemples des chapitres 5 et 6 le montreront.

Les sections précédentes ont exposé les stratégies de résolution mises en place pour le problème d'équilibre global du solide déformable. La suite de la présentation aborde le traitement de l'intégration des lois de comportement.

4.5 Intégration numérique des lois de comportement

4.5.1 Énoncé du problème

Le problème que l'on doit traiter peut être vu comme un problème piloté en déformation. On se place sur l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$, c'est-à-dire un incrément de chargement dans le cas d'une méthode globale implicite, ou un pas de résolution temporelle dans le cas d'une méthode globale explicite. La solution à l'instant t_n est supposée entièrement connue, c'est-à-dire que l'on connaît :

- Le champ de déplacements \vec{u}_n ,
- Le champ de contraintes $\underline{\sigma}_n$,
- Les valeurs des variables internes β à t_n : β_n .

Par ailleurs, le champ de déplacement \vec{u}_{n+1} à t_{n+1} est également supposé connu, puisqu'il est estimé à partir de la solution à t_n . On en déduit les déformations totales à t_{n+1} .

Rappelons que, dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'état de contraintes et de déformations est estimé aux points de Gauss, tandis que les déplacements sont des grandeurs connues aux nœuds. L'intégration du comportement se fait donc aux points de Gauss, et il importera de définir l'interpolation des déplacements en ces points lors du calcul des déformations, comme nous le verrons par la suite.

L'objectif est de déterminer les valeurs $\underline{\sigma}_{n+1}$ et β_{n+1} permettant de caractériser complètement l'état du matériau à l'instant t_{n+1} . Pour ce faire, nous avons à notre disposition :

- La loi de comportement exprimée ici en vitesse :

$$\underline{\tau}^c = \underline{\underline{C}}^e : \underline{D}^e \quad (4.84)$$

- Les lois d'évolution des variables internes, exprimées en fonction des forces thermodynamiques associées et notées A :

$$\dot{\beta} = g(A) \quad (4.85)$$

Il s'agit donc de résoudre un problème d'équations différentielles du premier ordre, à valeurs initiales, sur un intervalle $[t_n; t_{n+1}]$. Il est donc possible de faire appel à un schéma d'intégration de type règle des trapèzes généralisée ou schéma du point milieu généralisé. Une condition supplémentaire est vérifiée pour le calcul des contraintes, à savoir le respect de l'objectivité.

Les développements qui suivent sont pour une large part inspirés des références (Picart, 1986; Simo et Hughes, 1998; Gelin, 1999).

4.5.2 Configuration intermédiaire d'intégration

Les remarques précédentes impliquent qu'il est nécessaire de mettre en place un schéma incrémental d'intégration des contraintes objectif, c'est-à-dire tel que l'accroissement de contraintes entre les instants t_n et t_{n+1} satisfasse le principe d'objectivité.

On définit alors une famille de configurations intermédiaires $\mathcal{C}_{n+\alpha}$, $\alpha \in [0; 1]$ par :

$$\vec{x}_{n+\alpha} = (1 - \alpha) \vec{x}_n + \alpha \vec{x}_{n+1} \quad (4.86)$$

où \vec{x}_i représente les coordonnées repérant la configuration \mathcal{C}_i , de la même façon qu'au chapitre 3.

On peut calculer les gradients de déformation entre les différentes configurations. On adoptera de façon générale la notation suivante :

$$\underline{F}_r^p = \nabla_r \vec{x}_p \quad \text{ou} \quad (F_r^p)_{ij} = \frac{\partial (x_p)_i}{\partial (x_r)_j} \quad (4.87)$$

où :

- \underline{F}_r^p représente le gradient relatif de déformation entre les configurations \mathcal{C}_r et \mathcal{C}_p .
- $(F_r^p)_{ij}$ est la composante ij , dans une base cartésienne orthonormée, de \underline{F}_r^p .
- \vec{x}_r et \vec{x}_p sont les vecteurs de coordonnées repérant respectivement \mathcal{C}_r et \mathcal{C}_p .
- $(x_p)_i$ et $(x_r)_j$ sont leurs composantes respectives i et j .

Si on écrit le gradient de déformation sur $\mathcal{C}_{n+\alpha}$, on obtient :

$$\underline{F}_0^{n+\alpha} = \nabla_0 \vec{x}_{n+\alpha} \quad \text{ou} \quad F_0^\alpha = \frac{\partial x_{n+\alpha}}{\partial X} \quad (4.88)$$

En omettant, pour simplifier l'écriture, les indices des composantes dans l'égalité de droite, et en notant \vec{X} le vecteur repérant la configuration initiale.

Soit, avec (4.86) :

$$\underline{F}_0^{n+\alpha} = (1 - \alpha) \nabla_0 \vec{x}_n + \alpha \nabla_0 \vec{x}_{n+1} \quad (4.89)$$

ou encore :

$$\underline{F}_0^{n+\alpha} = (1 - \alpha) \underline{F}_0^n + \alpha \underline{F}_0^{n+1} \quad (4.90)$$

Par ailleurs, avec cette notation, les gradients relatifs sont calculés simplement, en écrivant que :

$$\underline{F}_r^p = \underline{F}_s^p \underline{F}_r^s \quad (4.91)$$

La définition des différents gradients de déformation utilisés est résumée sur la Fig. 4.8.

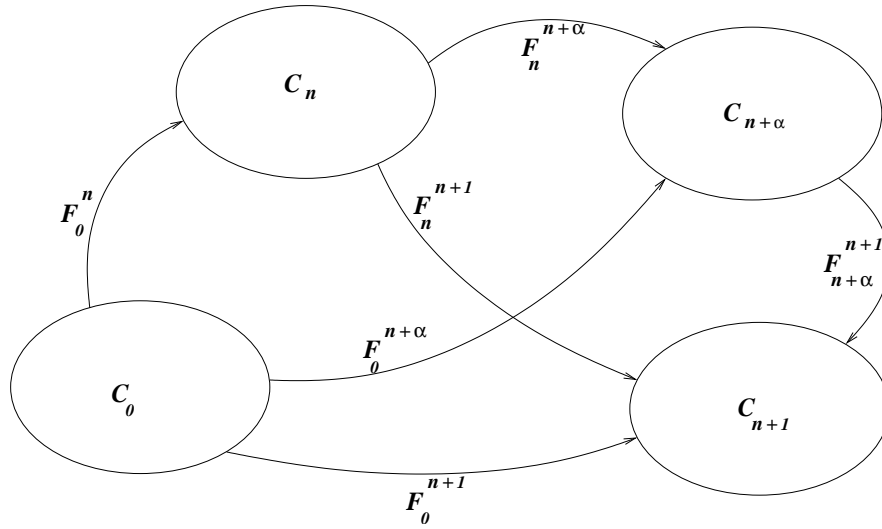


FIG. 4.8 – Configuration intermédiaire et gradients relatifs de déformation.

4.5.3 Schéma d'intégration du tenseur des contraintes

Pour construire un schéma d'intégration objectif du tenseur des contraintes par transport convectif, la méthode générale est la suivante :

- Connaissant la loi de comportement en vitesse dans la configuration courante, on la transporte dans la configuration initiale par transport convectif.
- Le schéma d'intégration temporelle est réalisé sur ces quantités transportées, leurs dérivées sont objectives puisque définies sur la configuration initiale.
- Le schéma d'intégration ainsi obtenu est transporté convectivement sur la configuration courante.

Le transport convectif de $\underline{\tau}$ donne :

$$\underline{\tau} = \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T \quad (4.92)$$

et pour la dérivée convective contravariante :

$$\underline{\tau}^c = \underline{F} \dot{\underline{S}} \underline{F}^T \quad (4.93)$$

Soit, sur la configuration $\mathcal{C}_{n+\alpha}$:

$$\underline{\tau}_{n+\alpha}^c = \underline{F}_0^{n+\alpha} \dot{\underline{S}}_{n+\alpha} (\underline{F}_0^{n+\alpha})^T \quad (4.94)$$

Le schéma d'intégration permet d'écrire que :

$$\underline{S}_{n+1} = \underline{S}_n + \Delta t \dot{\underline{S}}_{n+\alpha} \quad (4.95)$$

d'où :

$$\underline{\tau}_{n+\alpha}^c = \underline{F}_0^{n+\alpha} \frac{\underline{S}_{n+1} - \underline{S}_n}{\Delta t} (\underline{F}_0^{n+\alpha})^T \quad (4.96)$$

On obtient après calculs, en utilisant la règle de composition (4.91) :

$$\boxed{\underline{\tau}_{n+1} = \underline{F}_n^{n+1} \underline{\tau}_n (\underline{F}_n^{n+1})^T + \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \Delta t \underline{\tau}_{n+\alpha}^c (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T} \quad (4.97)$$

C'est cette dernière relation (4.97) qui sera utilisée pour le calcul de $\underline{\tau}_{n+1}$.

Remarques

- Si on suppose un mouvement de corps rigide, c'est-à-dire si \underline{F}_n^{n+1} est un tenseur orthogonal, on a $\underline{\tau}_{n+1} = \underline{F}_n^{n+1} \underline{\tau}_n (\underline{F}_n^{n+1})^T$, quelque soit la valeur de α . En effet, dans ce cas, $\Delta t \underline{D}_{n+\alpha} = 0$ et donc $\Delta t \underline{\tau}_{n+\alpha}^c = 0$.
- Si \underline{F}_n^{n+1} est un tenseur symétrique défini positif, on doit avoir $\Delta t \underline{W}_{n+\alpha} = 0$, où \underline{W} est le tenseur taux de rotation. On montre que cela est vérifié si $\alpha = \frac{1}{2}$, Picart (1986), Pinsky *et al.* (1983).

Ces deux remarques nous conduisent à prendre la valeur $\frac{1}{2}$ pour α .

Dans la suite de ce chapitre, on particularise le comportement en considérant un comportement élasto-plastique. Les autres types de comportement sont envisagés ultérieurement.

4.5.4 Comportement élasto-plastique

Schéma d'intégration de type prédiction-correction

Ce type de schéma consiste à supposer dans un premier temps que le chargement est élastique sur l'incrément considéré. Cette hypothèse permet de calculer une première estimation de l'accroissement de contraintes $\Delta t \underline{\tau}_{n+\alpha}^c$, puis des contraintes à l'aide de la relation (4.97).

A l'issue de ce calcul, on vérifie la condition de non positivité de la fonction de charge. Si celle-ci n'est pas vérifiée, une étape de correction plastique est nécessaire.

Prédiction élastique

D'après la relation (4.84), on peut écrire que :

$$\Delta t \underline{\tau}_{n+\alpha}^c = \Delta t \underline{C}^e : \underline{D}_{n+\alpha}^e \quad (4.98)$$

Soit, en vertu de l'additivité des taux de déformation (voir chapitre 3) :

$$\Delta t \underline{\tau}_{n+\alpha}^c = \Delta t \underline{C}^e : (\underline{D}_{n+\alpha} - \underline{D}_{n+\alpha}^p) \quad (4.99)$$

Si on suppose que le comportement est élastique ($\underline{D}^p = 0$), on aura, d'après (4.97) et (4.99) :

$$\underline{\tau}_{n+1}^e = \underline{F}_n^{n+1} \underline{\tau}_n (\underline{F}_n^{n+1})^T + \underline{F}_n^{n+1} \Delta t \underline{C}^e : \underline{D}_{n+\alpha} (\underline{F}_n^{n+1})^T \quad (4.100)$$

où $\underline{\tau}_{n+1}^e$ représente la prédiction élastique de $\underline{\tau}$.

On en déduit $\underline{\sigma}_{n+1}^e = (J_{n+1})^{-1} \underline{\tau}_{n+1}^e$, puis $\|\underline{s}_{n+1}^e\|$, où \underline{s}_{n+1}^e est le déviateur de $\underline{\sigma}_{n+1}^e$.

Il reste à vérifier l'hypothèse de comportement élastique en calculant :

$$f_p^e = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}_{n+1}^e\| - \sigma_0 \quad (4.101)$$

Si $f_p^e < 0$, alors la prédiction élastique est bonne et dans ce cas on a $\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e$. La procédure est alors terminée et les variables internes (ici la déformation plastique équivalente) restent invariantes : $\alpha_{n+1} = \alpha_n$.

Si au contraire $f_p^e > 0$, il y a écoulement plastique et il est nécessaire d'effectuer une correction plastique.

Remarque : Le calcul de la prédiction élastique nécessite la connaissance de \underline{F}_n^{n+1} , de $\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1}$, de J_{n+1} et de $\underline{D}_{n+\alpha}$. Le calcul de ces grandeurs est fourni dans l'annexe B.

Retour radial

A l'aide des équations (4.97), (4.99) et (4.100), la correction plastique s'écrit :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e - J_{n+1}^{-1} \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \Delta t \underline{C}^e : \underline{D}_{n+\alpha}^p (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T \quad (4.102)$$

Par ailleurs, si on effectue le transport convectif de $\underline{\tau}_{n+1}$ dans $\mathcal{C}_{n+\alpha}$, on obtient :

$$\underline{\tau}_{n+\alpha} = \underline{F}_{n+1}^{n+\alpha} \underline{\tau}_{n+1} (\underline{F}_{n+1}^{n+\alpha})^T \quad (4.103)$$

D'où en utilisant (4.97) :

$$\underline{\tau}_{n+\alpha} = \underline{F}_n^{n+\alpha} \underline{\tau}_n (\underline{F}_n^{n+\alpha})^T + \Delta t \underline{\tau}_{n+\alpha}^c \quad (4.104)$$

Et donc :

$$\underline{\sigma}_{n+\alpha} = \underline{\sigma}_{n+\alpha}^e - J_{n+\alpha}^{-1} \Delta t \underline{C}^e : \underline{D}_{n+\alpha}^p \quad (4.105)$$

On a de plus :

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha}^p = \Delta \lambda \left(\frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{n+\alpha} \quad (4.106)$$

Ce qui donne, puisque $f_p = \sigma_{eq} - R - \sigma_y$ (cf. chapitre 3) :

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha}^p = \frac{3}{2} \Delta \lambda \frac{\underline{s}_{n+\alpha}}{(\sigma_{eq})_{n+\alpha}} = \Delta \lambda \underline{n}_{n+\alpha} \quad (4.107)$$

Avec $\underline{n}_{n+\alpha} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}_{n+\alpha}}{(\sigma_{eq})_{n+\alpha}}$

On rappelle que \underline{C}^e est tel que $\underline{C}^e = K \underline{1} \otimes \underline{1} + 2G (\underline{I} - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1})$, d'où :

$$\Delta t \underline{C}^e : \underline{D}_{n+\alpha}^p = 2G \Delta \lambda \underline{n}_{n+\alpha} \quad (4.108)$$

(4.105) s'écrit alors :

$$\underline{\sigma}_{n+\alpha} = \underline{\sigma}_{n+\alpha}^e - J_{n+\alpha}^{-1} 2G \Delta \lambda \underline{n}_{n+\alpha} \quad (4.109)$$

De plus, si on décompose $\underline{\sigma}$ en partie déviatorique et partie sphérique :

$$\boxed{\underline{\sigma} = \frac{2}{3} \sigma_{eq} \underline{n} + \sigma_m \underline{1}} \quad (4.110)$$

(4.109) implique que :

$$(\sigma_{eq})_{n+\alpha} \underline{n}_{n+\alpha} = (\sigma_{eq})_{n+\alpha}^e \underline{n}_{n+\alpha}^e - J_{n+\alpha}^{-1} 3G \Delta \lambda \underline{n}_{n+\alpha} \quad (4.111)$$

Soit :

$$((\sigma_{eq})_{n+\alpha} + J_{n+\alpha}^{-1} 3G \Delta\lambda) \underline{n}_{n+\alpha} = (\sigma_{eq})_{n+\alpha}^e \underline{n}_{n+\alpha}^e \quad (4.112)$$

Ce qui montre que $\underline{n}_{n+\alpha}$ et $\underline{n}_{n+\alpha}^e$ ont même direction, et par suite, puisque ces tenseurs sont normés :

$$\boxed{\underline{n}_{n+\alpha} = \underline{n}_{n+\alpha}^e} \quad (4.113)$$

En utilisant (4.113) et (4.108) dans (4.102), on obtient finalement la correction plastique sur \mathcal{C}_{n+1} :

$$\boxed{\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e - 2J_{n+1}^{-1} G \Delta\lambda \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \underline{n}_{n+\alpha}^e (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T} \quad (4.114)$$

Cette dernière expression montre que $\underline{\sigma}$ n'intervient dans le calcul de $\Delta t \underline{D}_{n+\alpha}^p$ que par sa prédiction élastique sur $\mathcal{C}_{n+\alpha}$.

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur des variables internes, en l'occurrence ici la seule déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$. On rappelle que $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}$ (voir chapitre 3), de sorte que :

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda \quad (4.115)$$

Pour déterminer $\Delta\lambda$, on utilise l'expression de la fonction de charge à l'instant t_{n+1} . Pour des raisons de stabilité numérique, celle-ci est réécrite en fonction de la prédiction élastique.

On note \underline{N}_{n+1} le tenseur d'ordre 2 tel que :

$$\underline{N}_{n+1} = 2J_{n+1}^{-1} G \operatorname{dev} \left(\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \underline{n}_{n+\alpha}^e (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T \right) \quad (4.116)$$

où $\operatorname{dev}()$ représente la partie déviatorique du tenseur.

Avec cette notation, on peut écrire que :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}_{n+1}^e - \Delta\lambda \underline{N}_{n+1}\| \quad (4.117)$$

Et la fonction de charge devient :

$$\boxed{f_p(\Delta\lambda) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}_{n+1}^e - \Delta\lambda \underline{N}_{n+1}\| - R(\Delta\lambda) - \sigma_y = 0} \quad (4.118)$$

Cette équation non linéaire est résolue par une méthode de Newton. On obtient alors l'expression de $\Delta\lambda^{k+1}$, valeur numérique de $\Delta\lambda$ à l'itération $k+1$ du schéma de Newton.

$$\boxed{\Delta\lambda^{k+1} = \Delta\lambda^k - \frac{f_p(\Delta\lambda^k)}{f_p'(\Delta\lambda^k)}} \quad (4.119)$$

Avec pour $f_p'(\Delta\lambda^k)$:

$$\boxed{f_p'(\Delta\lambda^k) = -\frac{\partial R}{\partial \bar{\varepsilon}^p} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{N}_{n+1} : (\underline{s}_{n+1}^e - \Delta\lambda^k \underline{N}_{n+1})}{\|\underline{s}_{n+1}^e - \Delta\lambda^k \underline{N}_{n+1}\|}} \quad (4.120)$$

Calcul de l'opérateur tangent cohérent

Dans le cas d'un algorithme de résolution global implicite, il est nécessaire de calculer l'opérateur tangent cohérent avec l'algorithme d'intégration des contraintes utilisé (cf. section 4.3.2).

Il s'agit donc d'effectuer la différentiation de la loi de comportement afin d'obtenir une expression du type :

$$\partial \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{ep} : \partial \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.121)$$

où $\underline{\underline{C}}^{ep}$ est l'opérateur tangent cohérent recherché. Par souci de clarté, ce calcul est fourni dans l'annexe C. Tous calculs faits, on obtient l'expression de $\underline{\underline{C}}^{ep}$:

$$\underline{\underline{C}}^{ep} = J^{-1} \left(K \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2G \beta \left[\underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right] - 2G \varpi \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|} \right) \quad (4.122)$$

avec :

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_0}{\|\underline{\underline{s}}^e\|} \quad (4.123)$$

$$\varpi = \beta - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3GJ^{-1}} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \quad (4.124)$$

où $\sigma_0 = R + \sigma_y$ est la contrainte limite d'écoulement définie précédemment.

L'algorithme général d'intégration des lois de comportement élasto-plastique est résumé Tab. 4.4.

4.5.5 Comportement élasto-viscoplastique

Fonction de charge dynamique

Dans le cas où le comportement est élasto-viscoplastique, la notion de surface de charge n'existe plus au sens strict. On a alors $f_{vp} > 0$ si un écoulement viscoplastique a lieu. Néanmoins, on peut se ramener au même type de résolution que précédemment en introduisant la notion de 'fonction de charge dynamique', Boubakar *et al.* (2003). La vitesse de déformation viscoplastique équivalente est définie par :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} = \gamma \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - \sigma_y}{R} \right\rangle^m \quad (4.125)$$

Si on réécrit cette relation sous la forme :

$$\tilde{f}_{vp} = \sigma_{eq} - R - \sigma_y - R \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \quad (4.126)$$

On définit une fonction \tilde{f}_{vp} , que l'on appellera fonction de charge dynamique, et telle que :

1. Calcul de \underline{F}_n^{n+1} , $\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1}$, $\underline{F}_n^{n+\alpha}$
 Calcul de J_{n+1}
 Calcul de $\underline{D}_{n+\alpha}$
2. Prédiction élastique
 Calcul de $\underline{\tau}_{n+1}^e$ et $\underline{\tau}_{n+\alpha}^e$
 Calcul de $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ et \underline{s}_{n+1}^e
3. Calcul de f_p^e
 Si $f_p^e < 0$ alors $\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e$, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$ et aller en 7
 Sinon aller en 4
4. Correction plastique
 - a) Initialisation $\Delta\lambda^0 = 0$
 - b) Calcul de $H = -\frac{f_p(\Delta\lambda^k)}{f_p'(\Delta\lambda^k)}$
 Calcul de $\Delta\lambda^{k+1} = \Delta\lambda^k + H$
 Mise à jour de $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda^{k+1}$
 Correction de $\underline{\tau}_{n+1}$ et $\underline{\sigma}_{n+1}$
 - c) Test convergence :
 Si $|f_p| \leq \text{tolérance}$ aller en 5
 Sinon retour en 4b)
5. Si Implicite : calcul de \underline{C}^{ep}

TAB. 4.4 – Algorithme de correction des contraintes

$$\begin{cases} \tilde{f}_{vp} < 0 & \text{si le chargement est élastique,} \\ \tilde{f}_{vp} = 0 & \text{si un écoulement viscoplastique a lieu.} \end{cases} \quad (4.127)$$

Grâce à l'introduction de cette fonction de charge, l'algorithme utilisé dans le cas d'un comportement élasto-plastique peut être simplement transposé au cas viscoplastique.

Schéma du retour radial

Par rapport à l'algorithme précédent, $\dot{\varepsilon}^{vp}$ joue le rôle de $\dot{\lambda}$, avec toutefois une dépendance à la vitesse qui nécessite d'écrire les accroissements de déformation sous la forme $\dot{\varepsilon}^{vp} \Delta t$.

De la même façon que précédemment, on peut écrire la fonction de charge en fonction de $\dot{\varepsilon}^{vp} \Delta t$:

$$\tilde{f}_{vp}(\dot{\varepsilon}^{vp} \Delta t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}_{n+1}^e - \dot{\varepsilon}^{vp} \Delta t \underline{N}_{n+1}\| - R(\dot{\varepsilon}^{vp} \Delta t) - \sigma_y - R(\dot{\varepsilon}^{vp} \Delta t) \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \quad (4.128)$$

Ce qui permet d'écrire que :

$$(\dot{\varepsilon}^{vp})^{k+1} \Delta t = (\dot{\varepsilon}^{vp})^k \Delta t - \frac{\tilde{f}_{vp}((\dot{\varepsilon}^{vp})^k \Delta t)}{(\tilde{f}_{vp})'((\dot{\varepsilon}^{vp})^k \Delta t)} \quad (4.129)$$

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre 3, la sensibilité du comportement matériel à la vitesse de déformation s'accompagne en général d'une sensibilité à la température. Il faut donc calculer l'accroissement de température au cours de la déformation. On rappelle que pour déterminer l'échauffement adiabatique dû à la dissipation mécanique, on utilise une approximation de l'équation de la chaleur sous la forme, cf. chapitre 3 :

$$\rho C_v \dot{T} = \xi \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp}$$

On adopte un schéma d'intégration purement implicite pour les variables température et déformation plastique équivalente :

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} \Delta t \quad (4.130)$$

$$T_{n+1} = T_n + \frac{\xi}{\rho C_v} (\sigma_{eq})_{n+1} \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} \Delta t \quad (4.131)$$

Par ailleurs, on a (cf. chapitre 3) :

$$\dot{\alpha} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} - \left(\frac{R}{A} \right)^a$$

d'où :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} \Delta t - \Delta t \left(\frac{R}{A} \right)^a \quad (4.132)$$

De plus, $R = R(\alpha, T)$, de sorte que :

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}} = \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}} + \frac{\partial R}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}} \quad (4.133)$$

Et, d'après (4.131) et (4.132) :

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}} = \Delta t \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial R}{\partial T} \frac{\xi}{\rho C_v} (\sigma_{eq})_{n+1} \right)} \quad (4.134)$$

Enfin, on calcule la correction pour le tenseur des contraintes par :

$$\boxed{\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e - 2J_{n+1}^{-1} G \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} \Delta t \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \underline{n}_{n+\alpha}^e (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T} \quad (4.135)$$

L'algorithme général Tab. 4.4 est inchangé.

Utilisation d'une méthode du type 'line search'

La forme de la fonction de charge introduite pour traiter le comportement dépendant du temps peut entraîner des difficultés de convergence dans la méthode de Newton. Pour pallier cette difficulté, une méthode de 'line search' est utilisée.

La méthode de Newton consiste dans le cas général à rechercher le vecteur inconnu x tel que :

$$F(x) = 0 \quad (4.136)$$

- 1- Initialisation $k = 0$ et $x^k = x_0$.
- 2- Calcul de F et ∇F .
- 3- Calcul de $\nabla h = \nabla F^T F$.
- 4- Calcul de $p = -\nabla F^{-1} F$
- 5- Recherche itérative de x_{n+1} par la méthode de line search :

$$x_{n+1} = x_n + \theta p$$
- 6- Si $\|F\| \leq \text{tolerance}$ Fin.
Sinon $k = k + 1$ et aller en 2.

TAB. 4.5 – Méthode de line search.

où F représente un système d'équations non linéaire. x est alors pris sous la forme :

$$x_{n+1} = x_n + p \quad (4.137)$$

Avec $p = -\nabla F^{-1} F$. p est la direction de recherche de la nouvelle solution.

Pour déterminer si la direction p de la méthode de Newton est satisfaisante, on cherche à minimiser la fonctionnelle h telle que :

$$h = \frac{1}{2} F^T F \quad (4.138)$$

x_{n+1} est alors recherché sous la forme :

$$x_{n+1} = x_n + \theta p \quad (4.139)$$

Avec $0 \leq \theta \leq 1$.

Le problème est la détermination de θ . La solution est calculée de sorte que l'on ait :

$$h(x_{n+1}) \leq h(x_n) + \alpha \nabla h \cdot (x_{n+1} - x_n) \quad (4.140)$$

Avec α pris ici égal à 10^{-4} .

Les étapes pour la mise en place d'une méthode de line search sont résumées Tab. 4.5⁶. La première itération du point 5 de l'algorithme correspond à la méthode de Newton classique.

Calcul de l'opérateur $\underline{\underline{C}}^{evp}$

Comme pour le cas élasto-plastique, il faut dans le cas d'un algorithme implicite calculer $\underline{\underline{C}}^{evp}$. Les calculs étant très similaires au cas indépendant du temps, ils ne sont pas développés. Concrètement, les modifications à apporter dans l'opérateur tangent concernent l'introduction de termes relatifs à la vitesse de déformation et à la température dans la loi d'écrouissage.

On aboutit, après calculs, à une expression identique à (4.122). Seuls les coefficients β et ϖ sont modifiés de la façon suivante :

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tilde{\sigma}_0}{\|\underline{\underline{s}}^e\|} \quad (4.141)$$

⁶Pour de plus amples détails, cf. Press *et al.* (1995).

$$\boxed{\varpi = \beta - 1 + \frac{1}{1 + \frac{h_\alpha + h_T + h_{\dot{\varepsilon}^{vp}}}{3GJ^{-1}\Delta t}}} \quad (4.142)$$

où $\tilde{\sigma}_0$ est la contrainte limite apparente, telle que :

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_y + R(\alpha, T) \left(1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right)$$

Les coefficients h_α , h_T et $h_{\dot{\varepsilon}^{vp}}$ sont donnés par :

$$h_\alpha = \Delta t \frac{\partial R}{\partial \alpha} \left(1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (4.143)$$

$$h_T = \frac{\Delta t \xi \sigma_{eq}}{\rho C_v} \frac{\partial R}{\partial T} \left(1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (4.144)$$

$$h_{\dot{\varepsilon}^{vp}} = \frac{R}{\gamma m} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}-1} \quad (4.145)$$

4.5.6 Modèle d'endommagement de type Lemaître

Intégration numérique

Dans le cas d'un modèle d'endommagement couplé tel que le modèle de type Lemaître, il y a une variable interne supplémentaire à calculer, la variable d'endommagement D .

L'approximation algorithmique du tenseur des contraintes permet d'écrire que :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e - J_{n+1}^{-1} \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \Delta t (1 - D) \underline{\underline{C}}^e : \underline{D}_{n+\alpha}^p (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T \quad (4.146)$$

La fonction de charge prend cette fois la forme suivante (cf. chapitre 3) :

$$f_p(\underline{\sigma}, R, D) = \frac{\sigma_{eq}}{1 - D} - R - \sigma_y$$

D'où :

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha}^p = \Delta \lambda \left(\frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{n+\alpha} = \frac{3}{2} \frac{\Delta \lambda}{1 - D} \frac{\underline{s}_{n+\alpha}}{(\sigma_{eq})_{n+\alpha}} = \frac{\Delta \lambda}{1 - D} \underline{n}_{n+\alpha} \quad (4.147)$$

Un calcul similaire au précédent nous permet d'arriver à la même expression que (4.114) :

$$\boxed{\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e - 2J_{n+1}^{-1} G \Delta \lambda \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \underline{n}_{n+\alpha}^e (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T}$$

Avec cependant dans le calcul de $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ un coefficient $(1 - D)$.

Par ailleurs, en utilisant un schéma d'intégration implicite pour les variables internes, on peut écrire que :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \lambda \quad (4.148)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \frac{\Delta\lambda}{1-D} \quad (4.149)$$

d'une part et

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\lambda}{1-D} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \quad (4.150)$$

d'autre part.

Nous avons donc ici deux inconnues à rechercher : l'accroissement $\Delta\lambda$ et la variable d'endommagement D . Pour ce faire, nous pouvons écrire le système suivant :

$$\begin{cases} f_1(\Delta\lambda, D_{n+1}) = f_p = \frac{\sigma_{eq}}{1-D_{n+1}} - R - \sigma_y = 0 \\ f_2(\Delta\lambda, D_{n+1}) = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\lambda}{1-D} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} = 0 \end{cases} \quad (4.151)$$

Ce système non linéaire est résolu par une méthode de Newton, d'où :

$$\begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ D_{n+1} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ D_{n+1} \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial D_{n+1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\Delta\lambda^k, D_{n+1}^k) \\ f_2(\Delta\lambda^k, D_{n+1}^k) \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

Avec :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\lambda} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \frac{\underline{N}_{n+1} : (\underline{s}_{n+1}^e - \Delta\lambda^k \underline{N}_{n+1})}{\|\underline{s}_{n+1}^e - \Delta\lambda^k \underline{N}_{n+1}\|} \quad (4.153)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial D} = \frac{\sigma_{eq}}{(1-D)^2} \quad (4.154)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta\lambda} = -\frac{1}{1-D} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} - \frac{\Delta\lambda}{1-D} \frac{\partial \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0}}{\partial \Delta\lambda} \quad (4.155)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial D} = 1 - \frac{\Delta\lambda}{(1-D)^2} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} - \frac{\Delta\lambda}{1-D} \frac{\partial \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0}}{\partial D} \quad (4.156)$$

L'algorithme d'intégration des lois d'évolution est résumé Tab. 4.6.

1. Calcul de \underline{F}_n^{n+1} , $\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1}$, $\underline{F}_n^{n+\alpha}$
 Calcul de J_{n+1}
 Calcul de $\underline{D}_{n+\alpha}$
2. Calcul de $\underline{\tau}_{n+1}^e$ et $\underline{\tau}_{n+\alpha}^e$
 Calcul de $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ et $\underline{\xi}_{n+1}^e$
3. Calcul de f_p^e
 Si $f_p^e < 0$ alors $\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e$, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$, $D_{n+1} = D_n$ et aller en 7.
 Sinon aller en 4.
4. Initialisation $\Delta\lambda^0 = 0$, $D_{n+1} = D_n$
5. Calcul de $H = -[\nabla f(\Delta\lambda^k)]^{-1} f(\Delta\lambda^k)$
 avec $f^T = [f_1 \ f_2]$
 Calcul de x^{k+1} tel que $x^T = [\Delta\lambda \ D_{n+1}]$ par :
 $x^{k+1} = x^k + H$
 Mise à jour de $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda^{k+1}$
 Mise à jour de $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \frac{\Delta\lambda^{k+1}}{1 - D_{n+1}}$
 Correction de $\underline{\tau}_{n+1}$ et $\underline{\sigma}_{n+1}$
6. Test convergence :
 Si $|f| \leq \text{tolérance}$ aller en 7
 Sinon retour en 5
7. Si Implicite : calcul de $\underline{\underline{C}}^{evpd}$

TAB. 4.6 – Intégration numérique pour un modèle avec endommagement couplé.

Comme pour le cas élasto-viscoplastique, une méthode de line search est ajoutée pour résoudre le système de deux équations. En effet, la convergence du schéma peut en pratique être difficile à obtenir.

Comportement dépendant du temps

La généralisation au cas du comportement viscoplastique se fait exactement de la même façon que dans la sous-section 4.5.5. On fait également appel à la notion de fonction de charge dynamique. L'incrément de temps intervient alors explicitement dans les relations, et la résolution se fait sur les inconnues $\dot{\varepsilon}^{vp}$ et D . L'algorithme général Tab. 4.6 reste valable.

Calcul de l'opérateur $\underline{\underline{C}}^{evpd}$

La différentiation de la loi de comportement permet comme précédemment d'obtenir $\underline{\underline{C}}^{evpd}$. La différence essentielle vient des termes $(1 - D)$ introduits par la notion de contrainte effective.

Après calculs, on obtient pour l'opérateur tangent une forme identique à (4.122). Les coefficients β et ϖ , dans le cas général du comportement viscoplastique, sont donnés par :

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\hat{\sigma}_0}{\|\underline{\xi}^e\|} \quad (4.157)$$

$$\varpi = \beta - 1 + \frac{1}{1 + \frac{h_\alpha + h_T + h_{\dot{\alpha}} + h_D}{3GJ^{-1}\Delta t}} \quad (4.158)$$

Avec $\hat{\sigma}_0 = (1 - D)\tilde{\sigma}_0$. $\tilde{\sigma}_0$ est la contrainte limite apparente définie par :

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_y + R(\alpha, T) \left(1 + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right)$$

et on rappelle que l'on a, en ne tenant pas compte des termes de restauration (cf. chapitre 3) :

$$\dot{\alpha} = (1 - D)\dot{\varepsilon}^{vp}$$

Les coefficients h_α , h_T , $h_{\dot{\alpha}}$ et h_D sont donnés par :

$$h_\alpha = (1 - D)\Delta t \frac{\partial R}{\partial \alpha} \left(1 + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (4.159)$$

$$h_T = (1 - D) \frac{\Delta t \xi \sigma_{eq}}{\rho C_v} \frac{\partial R}{\partial T} \left(1 + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (4.160)$$

$$h_{\dot{\alpha}} = (1 - D) \frac{R}{\gamma m} \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}-1} \quad (4.161)$$

$$h_D = -\frac{R}{1 - D} \left(\frac{-Y}{S_0} \right)^{s_0} \left(1 + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (4.162)$$

Dans le cas du comportement indépendant du temps, les termes relatifs à la vitesse de déformation et à la température disparaissent des expressions précédentes.

4.5.7 Modèle d'endommagement de type Gurson

Introduction

La différence fondamentale avec les algorithmes décrits précédemment réside dans la nature de la correction plastique effectuée. En effet, dans le modèle de type Gurson, si l'incompressibilité plastique de la matrice est supposée, ce n'est plus le cas pour le comportement global du matériau. En d'autres termes, le matériau étant compressible, la correction plastique comportera un terme volumique en plus du terme déviatorique.

Nous aurons alors trois inconnues à déterminer : deux inconnues scalaires pour l'accroissement plastique, et une inconnue scalaire pour l'endommagement, à savoir la fraction volumique de cavités.

Différents schémas ont été proposés pour réaliser l'intégration du modèle de Gurson. Les développements qui suivent sont inspirés du schéma proposé par Aravas (1987).

Algorithme d'intégration

L'idée de base consiste à décomposer les tenseurs en une partie déviatorique et une partie sphérique. Pour cela, écrivons comme précédemment (4.110), que :

$$\underline{\sigma} = \frac{2}{3}\sigma_{eq}\underline{n} + \sigma_m\underline{1}$$

De plus :

$$\underline{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4.163)$$

où, comme dans le chapitre 3, Φ est la fonction de charge.

Par conséquent :

$$\underline{D}^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\sigma}} \right) \quad (4.164)$$

Soit :

$$\underline{D}^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \underline{n} + \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \underline{1} \right) \quad (4.165)$$

On note $\dot{\varepsilon}_m$ et $\dot{\varepsilon}_{eq}$ les inconnues scalaires définies par :

$$\dot{\varepsilon}_m = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_{eq} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \quad (4.166)$$

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_{eq} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} - \dot{\varepsilon}_m \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} = 0} \quad (4.167)$$

Par ailleurs, \underline{D}^p s'écrit :

$$\underline{D}^p = \dot{\varepsilon}_{eq} \underline{n} + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_m \underline{1} \quad (4.168)$$

Si on écrit la correction des contraintes sur la configuration intermédiaire, on obtient :

$$\underline{\sigma}_{n+\alpha} = \underline{\sigma}_{n+\alpha}^e - 2GJ_{n+\alpha}^{-1} \dot{\varepsilon}_{eq} \Delta t \underline{n}_{n+\alpha} - KJ_{n+\alpha}^{-1} \dot{\varepsilon}_m \Delta t \underline{1} \quad (4.169)$$

Ce qui se décompose en :

$$\begin{aligned} \underline{s}_{n+\alpha} &= \underline{s}_{n+\alpha}^e - 2GJ_{n+\alpha}^{-1} \dot{\varepsilon}_{eq} \Delta t \underline{n}_{n+\alpha} \\ (\sigma_m)_{n+\alpha} \underline{1} &= (\sigma_m^e)_{n+\alpha} \underline{1} - KJ_{n+\alpha}^{-1} \dot{\varepsilon}_m \Delta t \underline{1} \end{aligned} \quad (4.170)$$

La première relation permet, comme précédemment, de déduire que $\underline{n}_{n+\alpha} = \underline{n}_{n+\alpha}^e$, et se réécrit donc en :

$$(\sigma_{eq})_{n+\alpha} = (\sigma_{eq}^e)_{n+\alpha} - 3GJ_{n+\alpha}^{-1} \dot{\varepsilon}_{eq} \Delta t \quad (4.171)$$

Par ailleurs, on rappelle (cf. chapitre 3) que l'évolution des variables internes est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \frac{\underline{\sigma} : \underline{D}^p}{(1-f)\sigma_M}$$

où f est la fraction volumique de cavités.

En ne considérant que le cas où la nucléation est pilotée en déformation :

$$\dot{f} = (1-f)\underline{1} : \underline{D}^p + \mathcal{A}\dot{\varepsilon}_M^p$$

Ce qui, compte tenu des relations précédentes, s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \frac{\sigma_m \dot{\varepsilon}_m + \sigma_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \quad (4.172)$$

et :

$$\dot{f} = (1-f)\dot{\varepsilon}_m + \mathcal{A} \frac{\sigma_m \dot{\varepsilon}_m + \sigma_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \quad (4.173)$$

Enfin, rappelons l'expression générale de la fonction de charge :

$$\Phi = \Phi(\sigma_{eq}, \sigma_m, f, \sigma_M) = 0 \quad (4.174)$$

Les équations (4.167), (4.172), (4.173) et (4.174) définissent le problème d'évolution à résoudre. Nous commençons par déterminer les inconnues $\dot{\varepsilon}_m$ et $\dot{\varepsilon}_{eq}$ à l'aide de (4.167) et (4.174). Puis, nous en déduisons f et $\dot{\varepsilon}_M^p$ à l'aide de (4.172) et (4.173).

Le système non linéaire à résoudre est donc :

$$\begin{cases} g_1 = \Delta\varepsilon_{eq} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} - \Delta\varepsilon_m \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} = 0 \\ g_2 = \Phi(\sigma_{eq}, \sigma_m, f, \sigma_M) = 0 \end{cases} \quad (4.175)$$

On obtient alors à :

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_m \\ \Delta\varepsilon_{eq} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_m \\ \Delta\varepsilon_{eq} \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \end{bmatrix} \quad (4.176)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial g_1}{\partial \Delta\varepsilon_m} & a_{12} &= \frac{\partial g_1}{\partial \Delta\varepsilon_{eq}} \\ a_{21} &= \frac{\partial g_2}{\partial \Delta\varepsilon_m} & a_{22} &= \frac{\partial g_2}{\partial \Delta\varepsilon_{eq}} \end{aligned} \quad (4.177)$$

L'expression détaillée de ces coefficients est fournie dans l'annexe D, ainsi que les dérivées partielles de Φ intervenant dans les calculs précédents.

La résolution de ce système à deux inconnues fournit $\Delta\varepsilon_m$ et $\Delta\varepsilon_{eq}$. Avec (4.172) et (4.173), on obtient ensuite les valeurs mises à jour de $\dot{\varepsilon}_M^p$ et f . Enfin, les contraintes sont corrigées par :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^e - 2G J_{n+1}^{-1} \Delta\varepsilon_{eq} \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \underline{n}_{n+\alpha} (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T - K \Delta\varepsilon_m \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \underline{1} (\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1})^T \quad (4.178)$$

Calcul de l'opérateur $\underline{\underline{C}}^{epf}$

L'opérateur tangent cohérent est obtenu par différentiation de l'expression donnant le tenseur des contraintes. L'expression générale de cet opérateur revêt ici une forme différente des expressions précédentes. Ceci est dû à l'introduction de la dépendance à la déformation volumique $\Delta\varepsilon_m$. On aboutit à la relation suivante, Zhang (1995)⁷ :

$$\underline{\underline{C}}^{epf} = J^{-1} \left(d_0 \underline{\underline{I}} + d_1 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + d_2 \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} + d_3 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{n}} + d_4 \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) \quad (4.179)$$

Avec :

$$d_0 = 2G \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}^e} \quad (4.180)$$

$$d_1 = K - \frac{2G}{3} \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}^e} - 3K^2 C_{11} \quad (4.181)$$

$$d_2 = \frac{4G^2}{\sigma_{eq}^e} \Delta\varepsilon_{eq} - 4G^2 C_{22} \quad (4.182)$$

$$d_3 = -2GK C_{12} \quad (4.183)$$

$$d_4 = -6GK C_{21} \quad (4.184)$$

Les coefficients C_{11} , C_{12} , C_{21} et C_{22} sont fournis dans l'annexe D.

Comme l'indique Zhang, $\underline{\underline{C}}^{epf}$ n'est symétrique que si $C_{12} = 3C_{21}$. Toutefois, Aravas (1987) a montré que l'utilisation de la partie symétrique de ce tenseur ne dégrade pas la convergence du schéma. Par conséquent, dans ces travaux, nous travaillerons avec la partie symétrique de $\underline{\underline{C}}^{epf}$.

Notons par ailleurs que si l'on ne prend pas en compte les termes d'endommagement, on retrouve l'opérateur tangent cohérent donné par (4.122), Zhang (1995).

4.5.8 Bilan

Les différents algorithmes d'intégration des lois de comportement développés ont été détaillés. Ils reposent sur un schéma général de type prédiction-correction. Si l'essai élastique ne satisfait pas la condition de non positivité de la fonction de charge, les contraintes sont corrigées par projection orthogonale sur la surface de charge (schéma de retour radial). Les développements comprennent plusieurs niveaux de complexité, selon le type de problème à traiter.

Le cas de l'élasto-plasticité est le plus simple. L'algorithme présenté ici a permis de montrer comment prendre en compte les concepts propres aux transformations finies dans l'algorithme d'intégration.

L'élasto-viscoplasticité nécessite l'ajout des effets de la vitesse de déformation et de la température. Moyennant l'introduction d'une 'fonction de charge dynamique', il est possible de développer un algorithme d'intégration très similaire à l'élasto-plasticité. Cependant, l'emploi d'une méthode de type 'line search' s'avère nécessaire pour conserver la stabilité du schéma.

⁷De plus amples détails sur l'obtention de cet opérateur sont disponibles dans cette référence.

La prise en compte de l'endommagement introduit une inconnue supplémentaire, ce qui implique la résolution d'un système d'équations non linéaires. On peut se ramener à un système à deux inconnues (l'accroissement de déformation plastique et l'endommagement), que l'on résout par une méthode de Newton. Là encore, en particulier lorsqu'un comportement visco-plastique est choisi, une méthode d'accélération de la convergence est intéressante.

Enfin, le modèle de type Gurson nécessite un traitement particulier, du fait de la nature de la correction plastique à appliquer. Le matériau est, contrairement aux cas précédents, compressible, ce qui signifie que la correction des contraintes se fait à la fois sur la partie déviationnelle du tenseur des contraintes et sur sa partie volumique.

Signalons enfin que dans le cadre de l'utilisation d'un algorithme d'intégration global implicite, il y a nécessité de calculer l'opérateur tangent cohérent associé à l'algorithme d'intégration des contraintes. En effet, de nombreux auteurs ont montré que l'utilisation d'un module tangent standard, c'est-à-dire obtenu de façon analytique, affectait notablement la convergence du calcul, Zhang (1995), Simo et Hughes (1998). Nos propres tests l'ont confirmé pour le cas du découpage. L'emploi de ce type d'opérateur s'avère inadapté.

Ayant développé l'intégration des lois de comportement, il s'agit de simuler les phases d'amorçage et de propagation d'une fissure. Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 3, différentes stratégies ont été envisagées dans ces travaux.

4.6 Analyse de la fissuration

4.6.1 Introduction

Dans les sections précédentes, les méthodes numériques nécessaires au calcul de la réponse élasto-(visco)plastique avec ou sans endommagement de la structure ont été présentées. La dernière phase à simuler est celle de l'apparition et de la propagation d'une (ou plusieurs) fissure macroscopique, conduisant à la rupture complète de la tôle. Les différentes approches présentées ici ne reposent pas sur une modélisation précise du comportement du milieu fissuré, notamment vis-à-vis de la singularité du champ de contraintes en pointe de fissure. Nous rappelons qu'en découpage, le trajet de fissuration étant relativement simple, celui-ci peut être obtenu par une méthode numérique de rupture. D'après ce qui a été évoqué au chapitre 2, plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter le problème de la rupture de la tôle en découpage. Cette diversité d'approches nous a conduit à envisager plusieurs stratégies de résolution afin de les évaluer.

4.6.2 Première approche : non prise en compte de la propagation

C'est une méthode très simple, puisqu'elle ne nécessite qu'un calcul de prédiction d'amorçage d'une fissure. Celui-ci est en pratique effectué soit par un critère de rupture, soit par une variable d'endommagement dans le cas d'un modèle couplé, cf. chapitre 3. Concrètement, cette approche s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- L'amorçage de la fissure correspond à la fin de la zone cisailée dans le profil et au début de la formation de la zone arrachée. Ainsi, la détermination de ce point est suffisante pour déterminer l'allure du profil.
- Le trajet de la fissure est supposé connu. Il part du lieu d'amorçage de la fissure vers l'arête de l'outil opposé, en direction du lieu où la variable d'endommagement est la plus élevée.

Cette méthode permet a priori de déterminer l'importance relative des différentes zones composant le profil (bombée, cisailée, arrachée). Par ailleurs, elle donne une estimation de l'angle de rupture (angle d'inclinaison de la zone arrachée par rapport à la direction de découpage). En revanche, elle ne permet pas d'étudier la bavure, car le calcul éléments finis s'arrête à l'amorçage de la fissure.

4.6.3 Deuxième approche : Méthode d'élimination des éléments

Introduction

Dans la plupart des travaux portant sur la simulation numérique du découpage, la phase de rupture est envisagée par une méthode numérique. Trois types de méthodes sont proposés :

- Méthode d'annulation de la raideur ; lorsqu'un élément satisfait au critère de rupture utilisé (élément déclaré rompu), sa contribution à la matrice de raideur globale est annulée⁸. Ainsi, cet élément ne contribue plus au calcul global.
- Méthode d'élimination des éléments ; un élément déclaré rompu est dans ce cas supprimé du maillage.
- Méthode de séparation de nœuds ; Le critère de rupture portant sur les valeurs nodales de la variable d'endommagement, le calcul effectué aux points de Gauss de l'élément est transféré aux nœuds du maillage. Si un nœud satisfait au critère de rupture, il est alors dédoublé. Le relâchement local des contraintes en ce nœud permet d'ouvrir une fissure à cet endroit.

Notons que les deux premières méthodes sont très proches, puisque dans les deux cas l'objectif est d'annuler la contribution d'un élément rompu à la réponse globale de la structure. La différence principale provient de la modification topologique du maillage pour la seconde méthode. Par ailleurs, dans le cas de l'utilisation d'un modèle couplé en endommagement, l'accroissement de l'endommagement affecte les propriétés mécaniques du matériau et fait chuter la résistance de la zone endommagée. Par conséquent, dans ce cas, la diminution de la contribution de l'élément à la réponse globale est prise en compte dans le modèle de comportement. La rupture d'un élément est donc réalisée de façon moins brutale que pour un modèle non couplé.

La méthode de séparation des nœuds est quelque peu différente des deux premières, puisqu'il ne s'agit plus d'éliminer une partie du maillage dans la réponse globale de la structure. Elle obéit cependant à la même idée générale qui consiste à n'envisager que la phase d'amorçage d'une fissure sans étudier la propagation de cette dernière.

L'ensemble de ces méthodes comporte un inconvénient, à savoir la dépendance au maillage éléments finis. En effet, le maillage doit être suffisamment fin pour ne pas influencer le trajet de propagation de la fissure. Cependant, les nombreux travaux présentés

⁸en pratique, on lui assigne plutôt une valeur petite mais non nulle pour éviter une instabilité numérique.

ont montré que ces techniques permettaient une analyse suffisamment fine du profil de rupture. Les différentes zones du profil (y compris la bavure), l'angle de rupture, peuvent être déterminés avec une bonne précision si le maillage est assez fin.

Pour l'implémentation dans un code éléments finis, la méthode d'annulation de la raideur est simple puisqu'elle n'exige pas de modification topologique du maillage. En revanche, elle pose deux problèmes. D'une part, la chute plus ou moins brutale de la raideur de l'élément rompu peut entraîner des problèmes de convergence dans le cadre de l'utilisation d'un algorithme implicite. D'autre part, le transfert des informations lors d'un remaillage est rendu difficile par le fait que l'on a une valeur binaire à transférer (soit l'élément est rompu, soit il ne l'est pas).

La seconde méthode souffre du même inconvénient que la précédente, à savoir les problèmes de convergence de l'algorithme dus à l'élimination brutale des éléments. Cependant, elle peut être aisément couplée avec un algorithme de remaillage.

La dernière méthode est moins contraignante pour la stabilité de l'algorithme de résolution globale, du fait du relâchement local des contraintes permettant un retour à l'équilibre de la structure. Cependant, l'ouverture du maillage due au dédoublement des nœuds peut être difficile à obtenir, et conduire à des problèmes d'interpénétration aboutissant à l'échec du calcul (topologie du maillage mal définie). Par ailleurs, le calcul des valeurs nodales du critère de rupture doit être réalisé avec soin pour localiser précisément le lieu d'amorçage d'une fissure.

Dans ces travaux, la méthode d'élimination des éléments a été retenue. En effet, nous pensons que d'une part la précision de ces trois méthodes est équivalente, si le maillage éléments finis utilisé est suffisamment fin. D'autre part, c'est la méthode la plus aisée à mettre en œuvre dans le cadre d'un couplage avec un algorithme de remaillage.

Implémentation de la méthode d'élimination des éléments

Pour faciliter l'implémentation de la méthode, les restrictions suivantes sont imposées :

- A chaque étape d'élimination, un élément au maximum est éliminé. L'élimination d'un élément étant suivie d'une étape de rééquilibrage de la structure, plusieurs éléments peuvent donc malgré tout être éliminés pour un même pas de chargement.
- Seuls les éléments dont au moins un nœud appartient au contour de la pièce peuvent être éliminés. Cette restriction est nécessaire afin de pouvoir continuer à utiliser l'algorithme de remaillage. On n'envisagera donc par la suite que des fissures s'amorçant sur les bords de la tôle.

L'algorithme d'élimination des éléments commence par le calcul du critère de rupture sur chaque élément fini. Celui-ci est obtenu en effectuant la moyenne des valeurs calculées aux points de Gauss de l'élément. Si au moins un élément satisfait au critère de rupture, celui à éliminer est choisi selon les conditions suivantes :

- Au moins un des nœuds doit appartenir au contour,
- Parmi les éléments possibles, celui dont la valeur du critère de rupture est la plus grande est retenu.

Les diverses situations rencontrées dans le cas de l'utilisation d'éléments triangles sont présentées Fig. 4.9. Sur cette figure, seuls les éléments 1, 3 ou 4 sont autorisés à être éliminés. En effet, l'élément 5 est intérieur à la pièce. Quant à l'élément 2, son élimination entraînerait une mauvaise définition du nouveau contour de la pièce.

L'élimination de l'élément 3 est particulière, puisque celui-ci ne possède qu'un nœud sur le contour. Dans ce cas, ce nœud est dédoublé en ajoutant deux points supplémentaires sur le contour de la pièce.

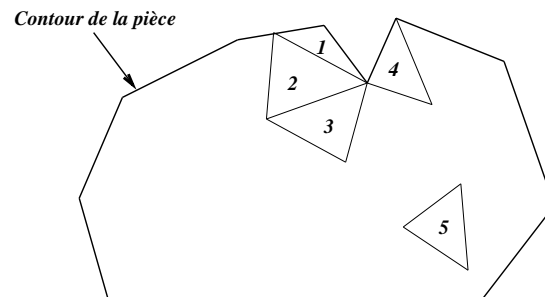


FIG. 4.9 – Les positions possibles pour des éléments triangles. L'élimination des éléments 2 et 5 est interdite.

L'élimination de l'élément 1, 3 ou 4 entraîne une redéfinition des nœuds du contour pour permettre le remaillage de la pièce. Le contour obtenu dans les différents cas est présenté Fig. 4.10.

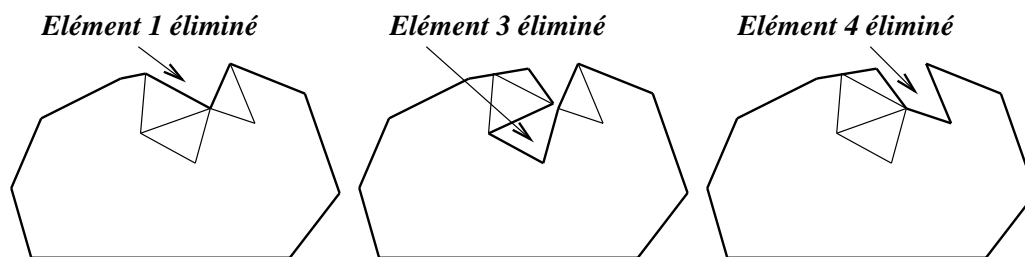


FIG. 4.10 – Nouveau contour de la pièce après suppression d'un élément (contour représenté en gras).

Une fois le nouveau contour déterminé, la pièce est remaillée, et une étape de rééquilibrage de la structure est effectuée. Si, à l'issue de cette étape, un nouvel élément est déclaré rompu, la procédure d'élimination des éléments est réitérée. On ne passe au pas de chargement suivant que lorsqu'aucun élément ne satisfait aux conditions de rupture.

L'algorithme général de la technique d'élimination des éléments est résumé Tab. 4.7 .

Remarque

La rupture totale de la tôle n'est pas simulée. En effet, celle-ci nécessite de définir la tôle totalement découpée par deux contours disjoints. La gestion de ce type de problème n'est pas abordée dans les développements présentés ici.

4.6.4 Troisième approche : analyse de la propagation d'une fissure

Introduction

Comme nous l'avons indiqué dans les chapitres 2 et 3, la méthode présentée ci-après ne fait pas appel aux concepts de la mécanique de la rupture. Elle reste donc en ce sens

<p>Résolution équilibre global</p> <p>1- <i>Initialisation</i> Pas de chargement $n = 1$.</p> <p>2- <i>Résolution de l'équilibre au pas n.</i> Calcul des déformations et des contraintes.</p> <p>3- Critère de rupture Si $CRITER = 0$: $n = n + 1$ et retour en 2. Si $CRITER = 1$: aller en 4.</p> <p>4- Elimination de l'élément rompu Retour en 2.</p>	<p>Critère de rupture</p> <p>1- <i>Initialisation</i> $CRITER = 0$ $D_{max} = 0$</p> <p>2- Pour chaque élément e Calcul de la variable d'endommagement D. Si $D > D_C$, $D > D_{max}$ et e appartient au contour : $D_{max} = D$ $CRITER = 1$</p> <hr/> <p>Elimination de l'élément rompu</p> <p>1- Création du nouveau contour. 2- Appel de l'algorithme de remaillage. 3- Retour à l'algorithme global.</p>
---	--

TAB. 4.7 – Implémentation de la technique d'élimination d'éléments.

une méthode d'analyse 'numérique' de la rupture. Cependant, elle constitue une approche suffisamment fine pour l'étude de la propagation des fissures en découpage des métaux.

Pour étudier la propagation d'une fissure, il y a lieu de considérer trois étapes :

- L'amorçage d'une fissure. Cette étape a déjà été présentée précédemment.
- La stabilité d'une fissure. Il s'agit de déterminer si une fissure existante va ou non se propager.
- La recherche de la direction de propagation. Si une fissure se propage, il faut déterminer sa direction de propagation.

Pour les deux dernières étapes, plusieurs techniques sont envisageables. De nombreuses informations sont disponibles dans Bouchard (2000). Nous envisagerons la technique appliquée par Brokken (1999) au cas du découpage. Celle-ci consiste à déterminer les conditions de propagation par l'analyse de la distribution de la variable d'endommagement. En effet, l'utilisation d'un critère en contraintes est rendue difficile par le fait que les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure doivent être calculées avec précision. De plus, les calculs énergétiques tels que l'intégrale de Rice utilisée en mécanique de la rupture nécessitent des aménagements importants par rapport à un maillage éléments finis classique. En outre, l'utilisation de tels critères reste discutable lorsque l'on s'éloigne des conditions de plasticité confinée, ce qui est le cas en découpage. L'utilisation d'une variable d'endommagement constitue donc une méthode simple pour étudier à la fois la stabilité d'une fissure et sa direction de propagation.

Développements numériques

Comme pour les deux approches précédentes, la première étape consiste à localiser le lieu d'amorçage d'une fissure. Les critères d'amorçage en endommagement critique définis précédemment seront là encore utilisés, avec les restrictions suivantes :

- Seul l'amorçage d'une fissure sur les bords de la tôle est autorisé. Comme précédemment, cette restriction est rendue nécessaire par l'utilisation de l'algorithme de remaillage.
- Une seule fissure peut s'amorcer à chaque étape. Le rééquilibrage de la structure après amorçage n'interdit cependant pas l'amorçage de plusieurs fissures macroscopiques pour un même pas de chargement.

Puisque l'amorçage d'une fissure est considéré comme survenant sur les bords de la tôle, il faut calculer le critère de rupture aux nœuds du contour. Pour effectuer cette opération, une méthode d'extrapolation des valeurs aux nœuds du maillage à partir des valeurs connues aux points de Gauss, identique à celle présentée dans le cadre de l'algorithme de remaillage, est mise en place. Si plusieurs nœuds satisfont au critère de rupture envisagé, la fissure est amorcée au nœud pour lequel la valeur de ce critère est la plus élevée.

Pour effectuer cet amorçage, la méthode est identique à celle présentée ci-après pour déterminer la direction de propagation d'une fissure.

La définition géométrique d'une fissure est représentée Fig. 4.11.

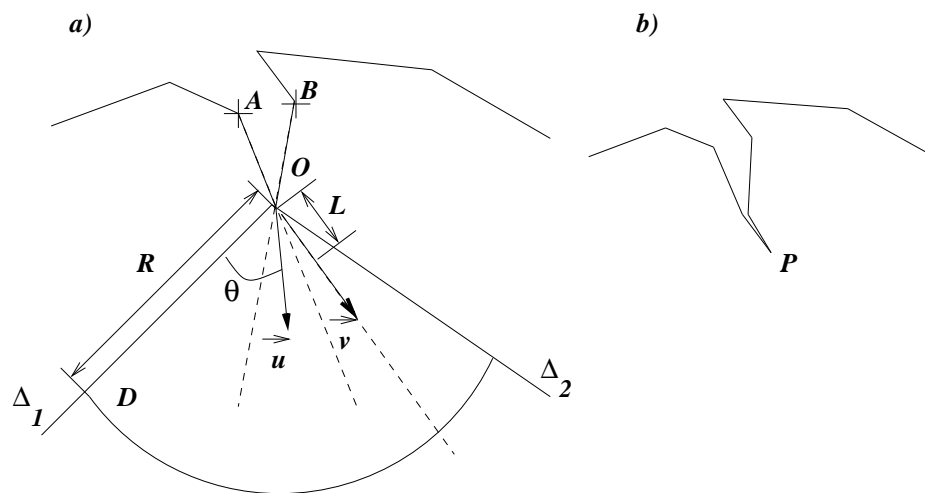


FIG. 4.11 – a) Définition géométrique d'une fissure ; b) Résultat après propagation.

Sur cette figure, O correspond au nœud en pointe de fissure, tandis que A et B représentent les nœuds du contour adjacents à O . On note \vec{u} le vecteur unitaire de la médiatrice des droites (AO) et (BO) . Celui-ci est dirigé vers l'intérieur du solide déformable. La direction de propagation recherchée est repérée par le vecteur unitaire \vec{v} . Les droites Δ_1 et Δ_2 délimitent la zone de recherche pour la direction de propagation. Bouchard (2000) indique que l'angle maximal de bifurcation de la fissure est égal à $\pm 70^\circ$ environ. C'est la valeur que nous retiendrons dans ces travaux pour l'angle θ , cf. Fig. 4.11.

La distance de propagation est notée L . Cette distance doit en théorie être déterminée. Cependant, en pratique, cette distance est fréquemment fixée arbitrairement, Bouchard (2000). Dans ce cas, il est nécessaire que la distance de propagation fixée soit suffisamment petite devant les dimensions de la pièce étudiée. Nous retiendrons cette approche dans ces travaux. La valeur imposée à L sera précisée dans la mise en données des essais présentés.

Pour déterminer à la fois si une fissure se propage et sa direction de propagation, on définit une portion de disque D à partir des droites Δ_1 , Δ_2 et d'un arc de cercle centré en O de rayon R . En pratique, R est pris égal à $5L$, pour éviter une trop grande influence des éléments situés près de la pointe de la fissure. Le critère de rupture est examiné pour les

éléments situés dans cette portion de disque. Si un élément satisfait au critère de rupture, on considère que la fissure se propage. Dans ce cas, pour chaque élément de la portion de disque, le vecteur unitaire donnant la direction de l'élément par rapport à la pointe de la fissure est calculé. Cette valeur est pondérée par la distance de l'élément à O , ainsi que par la valeur du critère de rupture en cet élément. La moyenne pondérée de l'ensemble des directions obtenues est effectuée. Elle permet de calculer le vecteur unitaire \vec{v} .

Une fois connue la direction de propagation, il est possible d'ajouter un nouveau nœud en P . Le nœud O est dédoublé, pour permettre l'ouverture de la fissure. La propagation de la fissure est réalisée lors de l'étape de remaillage qui suit, le contour de la pièce étant modifié avec l'ajout des points précédents. On obtient alors une nouvelle fissure comme celle représentée (*Fig. 4.11*)_b. La propagation de fissure est suivie d'une étape de rééquilibrage de la structure. A l'issue de cette étape, l'étude de la propagation des fissures est réitérée. On ne passe au pas de chargement suivant que lorsqu'aucune propagation de fissure n'est détectée.

Enfin, comme pour la méthode d'élimination des éléments, la rupture complète de la tôle ne sera pas simulée, pour les mêmes raisons topologiques.

4.6.5 Bilan

Les diverses stratégies d'analyse de la fissuration de la tôle ont été présentées. Trois approches distinctes ont été retenues. La première s'appuie sur l'observation expérimentale et consiste à supposer que la propagation de la fissure est quasi-instantanée. Par ailleurs, le chemin de propagation est supposé connu, à savoir dirigé de l'arête d'un outil à l'autre. Ainsi, en première approche, on peut considérer que seule la détermination de l'instant d'amorçage d'une fissure est nécessaire pour connaître le profil de la tôle découpée. Dans la seconde approche, la phase de propagation de la fissure est obtenue de façon numérique. Dès qu'un élément satisfait au critère de rupture choisi, celui-ci est déclaré rompu et supprimé du calcul. Enfin, la troisième méthode proposée est une approche dite discrète, dans laquelle une fissure est introduite au sein du maillage au cours du calcul. Par conséquent, il y a nécessité de déterminer non seulement le lieu d'apparition d'une fissure mais également sa direction de propagation. Les exemples numériques des chapitres 5 et 6 illustreront les différences entre ces différentes méthodes, ainsi que leur capacité à prédire le chemin de propagation d'une fissure.

Conclusion

Dans ce chapitre, les développements numériques effectués ont été présentés. Ceux-ci peuvent se décomposer en deux parties. La première concerne les développements inhérents à la résolution globale de l'équilibre de la structure. Pour la discrétisation spatiale du problème, un algorithme de remaillage automatique a été mis en place, permettant d'éviter les trop grandes distortions du maillage éléments finis. Un algorithme de type dynamique explicite basé sur la méthode des différences centrées a été développé pour la discrétisation temporelle du problème. Celui-ci s'avérera utile dans le cas de problèmes fortement non linéaires, pouvant occasionner l'échec d'un algorithme de type implicite. La seconde partie des développements concerne la mise en place d'algorithmes locaux d'intégration des lois de comportement. La prise en compte du formalisme des transfor-

mations finies a d'abord été détaillée. Puis, les algorithmes respectifs d'intégration de lois élasto-plastique et élasto-viscoplastique avec effets thermiques ont été présentés. Le couplage déformation-endommagement a également été effectué par deux modèles d'endommagement, un modèle de type Lemaître et un modèle de type Gurson. Enfin, la stratégie d'analyse de la phase de rupture a été discutée. Elle consiste tout d'abord en une phase de prédiction de l'amorçage d'une fissure. Celle-ci est réalisée soit par l'intermédiaire d'une valeur seuil de la variable d'endommagement dans le cas des modèles couplés, soit par l'intermédiaire d'une fonction critère pour un modèle non couplé. Les critères de rupture proposés respectivement par Freudenthal, Oyane, Cockcroft et Latham, et Rice et Tracey ont été implémentés dans notre programme⁹. Une fois une fissure amorcée, trois méthodes ont été proposées pour analyser la rupture complète de la tôle. La première consiste à considérer que le calcul est terminé avec l'amorçage d'une fissure. La seconde est la méthode d'élimination des éléments, dans laquelle un élément déclaré rompu est supprimé du maillage éléments finis. La troisième est une approche discrète de la fissuration, dans laquelle une fissure est créée au sein du maillage. Au cours du calcul, l'analyse de sa propagation est alors effectuée.

Le chapitre 5 présente des tests de validation démontrant la bonne implémentation de l'ensemble de ces modèles. Un exemple de découpage axisymétrique permettra en particulier de tester les différentes approches proposées pour le traitement de la rupture ductile.

⁹L'implémentation de ces critères n'a pas été détaillée dans ce chapitre puisqu'elle consiste simplement en un calcul numérique d'une fonction intégrale.

Chapitre 5

Exemples numériques de validation

Sommaire

Introduction	137
5.1 Traction d'un élément Q4 axisymétrique	138
5.1.1 Description du test	138
5.1.2 Comportements élasto-plastique et élasto-viscoplastique	138
5.1.3 Modèle de type Lemaître	143
5.1.4 Modèle de type Gurson	146
5.2 Essai de cisaillement simple	147
5.2.1 Description du test	147
5.2.2 Solution analytique	147
5.2.3 Résultats	149
5.3 Traction uniaxiale d'une éprouvette	150
5.3.1 Description du test	150
5.3.2 Résultats	152
5.4 Traction d'une plaque non symétrique	154
5.4.1 Description du test	154
5.4.2 Prédiction de l'amorçage d'une fissure	156
5.4.3 Méthode d'élimination des éléments	157
5.4.4 Méthode de propagation de fissures	158
5.4.5 Bilan	160
5.5 Test de compression : collar test	161
5.5.1 Description du test	161
5.5.2 Analyse qualitative de l'algorithme de remaillage	162
5.5.3 Comparaison avec les données expérimentales	164
5.6 Essai de forgeage à chaud	165
5.6.1 Description du test	165
5.6.2 Résultats	167
5.7 Découpage axisymétrique	170
5.7.1 Description du test	170
5.7.2 Résultats	172
5.7.3 Bilan	182
Conclusion	183

Introduction

La modélisation retenue a été présentée dans les chapitres 3 et 4. Les développements numériques réalisés au cours de la thèse portent sur les points suivants :

- Développement d'un algorithme de remaillage,
- Développement d'un algorithme dynamique explicite basé sur la méthode des différences finies centrées,
- Prise en compte des conditions de contact et de frottement par un modèle de type Coulomb,
- Implémentation d'algorithmes d'intégration locaux de lois de comportement élasto-(visco)plastique avec ou sans couplage déformation-endommagement,
- Simulation numérique de la rupture ductile par élimination des éléments ou par propagation de fissure.

Les exemples présentés dans ce chapitre ont pour objectif de valider ces développements numériques. Plusieurs niveaux de complexité sont proposés. Les premiers calculs portent sur des essais élémentaires pour lesquels il est possible de comparer la solution calculée à une solution analytique. Puis, nous envisagerons des problèmes simples pour valider les développements portant sur le comportement du matériau. Des calculs sur des structures plus élaborées permettront ensuite de montrer la fiabilité et la robustesse des algorithmes de discrétisation spatiale et temporelle mis en œuvre, ainsi que la reproduction correcte, au moins d'un point de vue qualitatif, des conditions de contact avec frottement. Enfin, le dernier exemple présente un calcul de découpage 2D axisymétrique. Les méthodes numériques proposées pour simuler l'endommagement et la rupture y seront en particulier évaluées.

5.1 Traction d'un élément Q4 axisymétrique

5.1.1 Description du test

Ce premier calcul a pour but de valider les lois de comportement implémentées.

On considère un élément quadrangulaire à quatre nœuds de côté 1 mm soumis à un déplacement imposé \bar{u}_z , Fig. 5.1. On se place dans une hypothèse d'axisymétrie.

Pour cet essai, l'algorithme quasi-statique implicite est utilisé. Le chargement est décomposé en 200 incréments égaux.

5.1.2 Comportements élasto-plastique et élasto-viscoplastique

Nous considérons tout d'abord un matériau non endommageable. La comparaison des résultats est effectuée avec la solution analytique. Puis, quelques résultats caractéristiques du comportement viscoplastique sont présentés.

Solution analytique

Le déplacement axial est noté u_z , et le déplacement radial u_r .

La position de tout point matériel appartenant à l'élément est donnée à l'instant t par :

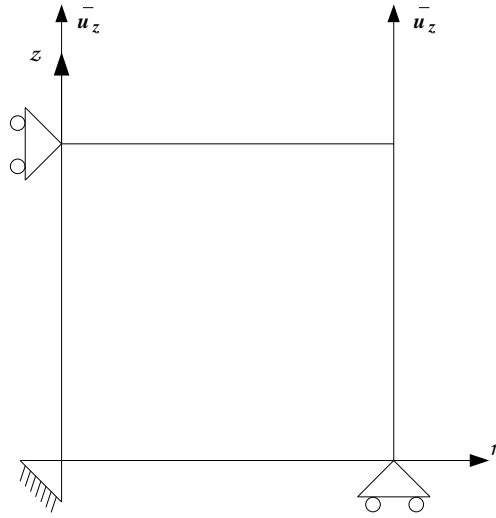


FIG. 5.1 – Conditions aux limites pour un élément Q4 soumis à une sollicitation de traction uniaxiale.

$$\begin{cases} r(t) = (1 + u_r(t))R \\ z(t) = (1 + u_z(t))Z \end{cases} \quad (5.1)$$

Où (R, Z) représentent les coordonnées initiales du point. Dans un souci de simplification, le symbole t est omis par la suite. Par ailleurs, les tenseurs d'ordre deux ne sont plus soulignés puisqu'on les envisage ici à travers leur forme matricielle dans une base orthonormée directe.

On obtient donc :

$$F = \begin{bmatrix} 1 + u_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 + u_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 + u_z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \dot{F}F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{u}_r}{1+u_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{u}_r}{1+u_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{u}_z}{1+u_z} \end{bmatrix} = D \quad (5.2)$$

Les déformations élastiques sont négligées donc :

$$\det F \simeq 1 \quad \text{et} \quad D \simeq D^p \quad (5.3)$$

D'où :

$$D^p = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\dot{u}_z}{1 + u_z} \quad (5.4)$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = a \quad (5.5)$$

et

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}^p dt = \int_0^t \frac{\dot{u}_z}{1 + u_z} dt = \ln(1 + u_z) \quad (5.6)$$

La longueur initiale l_0 n'intervient pas explicitement ici puisqu'elle est prise pour simplifier égale à 1 mm .

Par ailleurs, en traction uniaxiale, on a :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{eq} \quad (5.7)$$

Où σ_{zz} représente la seule composante non nulle du tenseur des contraintes dans la direction de traction.

De plus la loi d'écrouissage choisie est telle que :

$$\sigma_0 = k(\bar{\varepsilon}^p)^n \quad (5.8)$$

Le critère de von Mises implique que :

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 \quad (5.9)$$

Si le matériau est sensible à la vitesse de déformation, (5.9) est remplacée par¹ :

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 \left(1 + \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (5.10)$$

Les relations (5.5), (5.6) et (5.8) étant toujours vérifiées.

Si l'on travaille à vitesse de déplacement imposée, la vitesse de déformation plastique équivalente varie au cours de l'essai. Pour déterminer la courbe d'écrouissage analytique, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}$ et $\bar{\varepsilon}^{vp}$ sont calculés respectivement par (5.5) et (5.6), puis substitués dans (5.10).

Influence de la vitesse de déformation

Les caractéristiques mécaniques du matériau considéré (matériau fictif) sont fournies Tab. 5.1. L'influence de la température est négligée.

Grandeur	Symbole	Valeur
Module d'Young	E	200 000 MPa
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Limite élastique	σ_y	0 MPa
Coefficient de résistance	k	200 MPa
Coefficient d'écrouissage	n	0.2
Exposant de vitesse	m	3
Constante de fluidité	γ	$0.7 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

TAB. 5.1 – Caractéristiques mécaniques du matériau pour l'essai de traction.

Le déplacement total imposé est tel que $\bar{u}_z = 1\text{ mm}$.

Les résultats obtenus pour des vitesses de déplacement de 1 mm.s^{-1} , 10^{-1} mm.s^{-1} et 10^{-2} mm.s^{-1} sont présentés Fig. 5.2. La courbe d'écrouissage pour le cas de la plasticité indépendante du temps est également tracée.

On constate que la dépendance du matériau à la vitesse de déformation est correctement reproduite, puisque la contrainte de traction augmente avec la vitesse de déformation

¹En négligeant l'effet de la température.

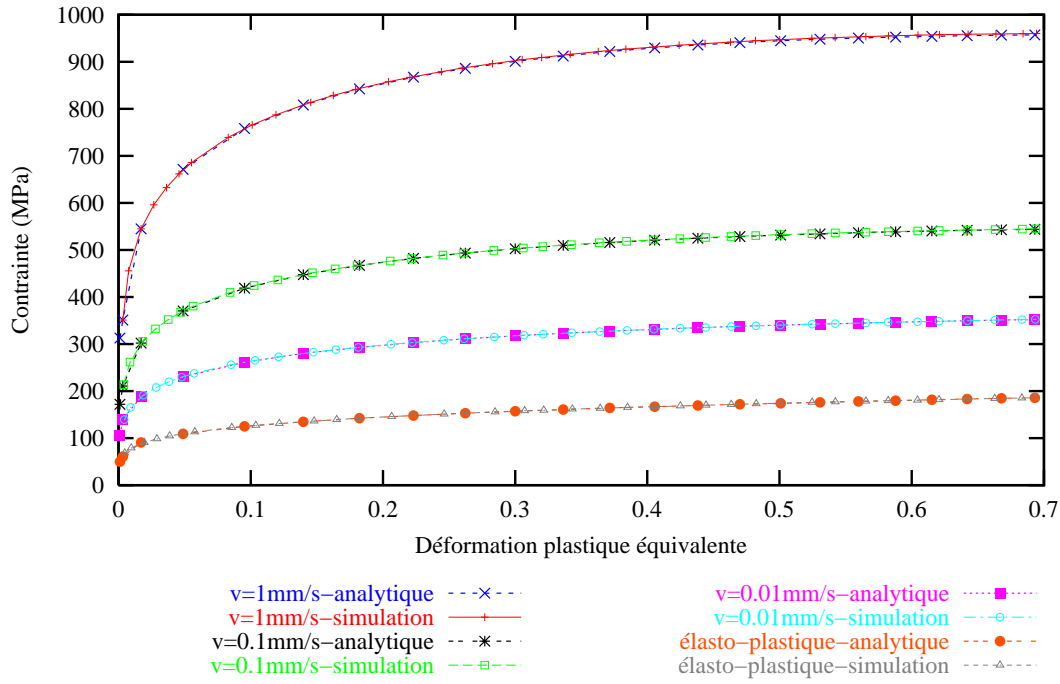


FIG. 5.2 – Comparaison des courbes d'écrouissage numérique et analytique pour plusieurs vitesses de déplacement.

plastique équivalente. En outre, l'accord entre les résultats numériques et analytiques est très bon pour cet essai élémentaire.

Si on fait varier la vitesse de déplacement, donc la vitesse de déformation, au cours de l'essai, nous obtenons une courbe similaire à l'expérience, Fig. 5.3. En effet, lorsque la vitesse augmente, la courbe d'écrouissage tend vers la courbe d'écrouissage correspondant à cette nouvelle vitesse. Le retour à la vitesse initiale entraîne le retour à la courbe d'écrouissage initiale.

Influence de la température

Nous introduisons l'influence de la température dans la loi d'écrouissage, en remplaçant (5.8) par :

$$\sigma_0 = k(\bar{\epsilon}^p)^n \left[\exp \left(\frac{\Delta H}{\eta T} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (5.11)$$

La contrainte de traction est toujours donnée par (5.10).

L'influence de la température peut être modulée en faisant varier le paramètre p : plus p est important, plus l'influence de T est négligeable.

Par ailleurs, on rappelle que l'échauffement adiabatique est calculé par la relation :

$$\dot{T} = \frac{\xi}{\rho C_v} \sigma_{eq} \dot{\bar{\epsilon}}^{vp} \quad (5.12)$$

Les valeurs des différents coefficients intervenant sont données Tab. 5.2.

Les courbes d'écrouissage obtenues pour deux valeurs de p sont présentées Fig. 5.4. Là encore, le comportement est correctement simulé. En effet, on note une diminution de

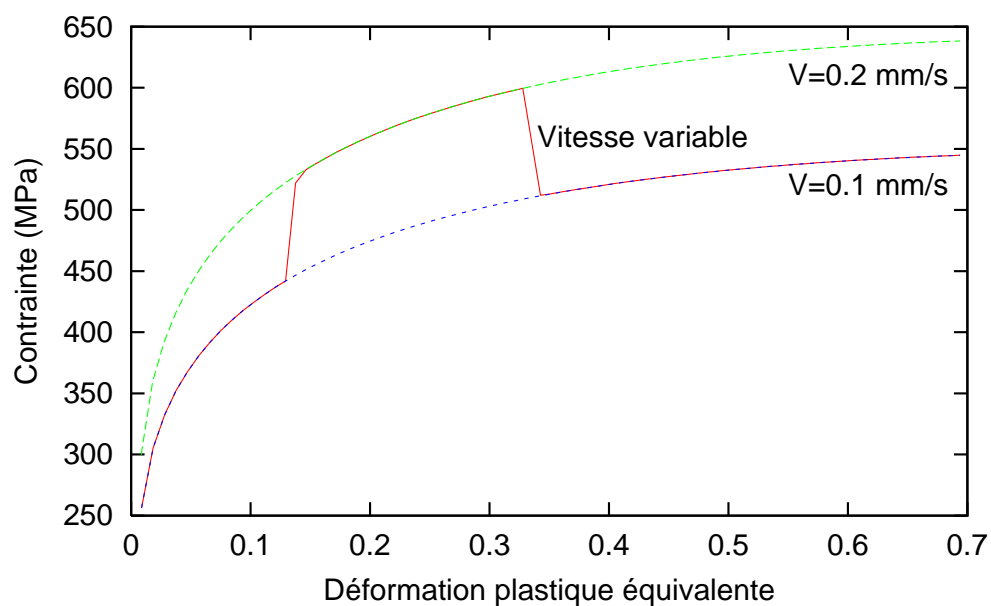


FIG. 5.3 – Effet de la variation de la vitesse d’essai sur la courbe d’écroutissage, pour l’essai de traction.

Grandeur	Symbole	Valeur
Exposant thermique	p	100 ou 10 000
Coefficient	$\Delta H/\eta$	15 000 K
Fraction de dissipation	ξ	0.9
Chaleur spécifique à volume constant	C_v	$0.56 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse volumique	ρ	7800 kg.m^{-3}

TAB. 5.2 – Valeurs des coefficients thermiques et de la masse volumique.

la contrainte pour $p = 100$, c'est-à-dire en prenant en compte l'influence de T , que l'on n'observe pas avec $p = 10000$. Par ailleurs, sur ce graphe, la courbe d'écrouissage pour $p = 100$ et pour une température de référence de 400 K est tracée. On constate que les allures des courbes pour $T_0 = 298\text{ K}$ et $T_0 = 400\text{ K}$ sont similaires. Cependant, le niveau de contraintes diminue avec la température initiale, ce qui est conforme au comportement attendu.

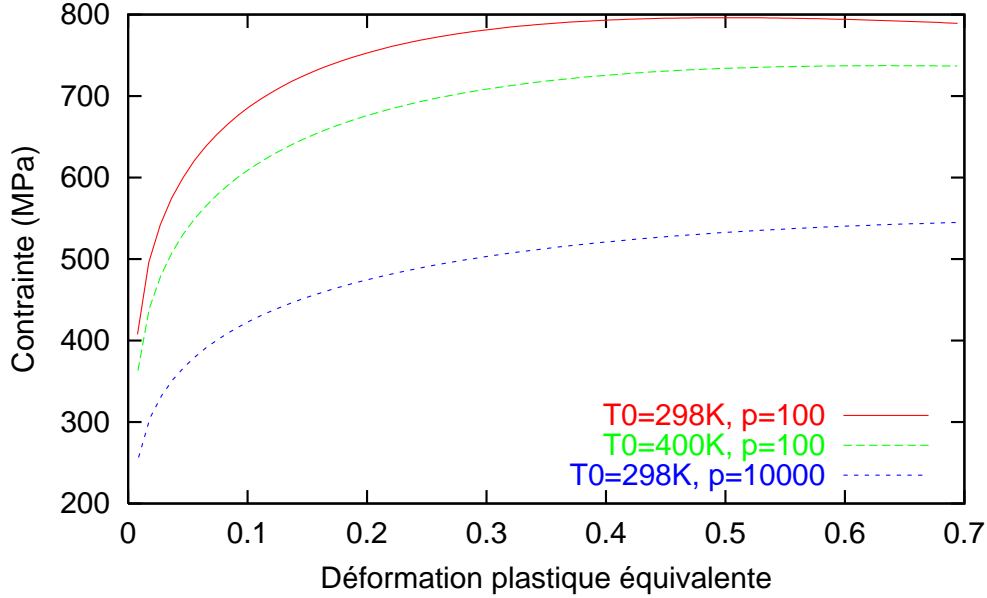


FIG. 5.4 – Influence de la température sur la courbe d'écrouissage pour l'essai de traction.

Après avoir étudié les comportements plastique et viscoplastique, les modèles d'endommagement de type Lemaître et de type Gurson sont évalués.

5.1.3 Modèle de type Lemaître

Si on envisage un couplage déformation-endommagement avec le modèle de type Lemaître, la contrainte est donnée par :

$$\sigma_{zz} = (1 - D) \sigma_0 \left(1 + \beta \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \quad (5.13)$$

Où β vaut 0 dans le cas indépendant du temps et 1 en viscoplasticité.

La contrainte d'écoulement σ_0 est toujours donnée par (5.8), en remplaçant $\bar{\varepsilon}^p$ par α . Il faut encore dans ce cas préciser l'évolution de l'endommagement.

Le taux de triaxialité étant égal à $\frac{1}{3}$, Y se réduit à :

$$Y = -\frac{\sigma_{zz}^2}{2E(1 - D)^2} \quad (5.14)$$

Donc, en utilisant (5.13), on obtient :

$$Y = -\frac{\sigma_0^2}{2E} \left[1 + \beta \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^2 \quad (5.15)$$

Ce qui donne finalement pour \dot{D} :

$$\dot{D} = \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{\varepsilon}^p = \left(\frac{\sigma_0^2}{2ES_0} \left[1 + \beta \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^2 \right)^{s_0} \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (5.16)$$

On aboutit au système d'équations suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\dot{u}_z}{1 + u_z} \\ \dot{\alpha} = (1 - D)\dot{\varepsilon}^{vp} \\ \dot{D} = \left(\frac{\sigma_0^2}{2ES_0} \left[1 + \beta \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^2 \right)^{s_0} \dot{\varepsilon}^{vp} \\ \sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon}^{vp}) \\ \sigma_{zz} = (1 - D)\sigma_0 \left(1 + \beta \left(\frac{\dot{\alpha}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Ce système est résolu en utilisant un schéma d'Euler, avec un incrément de déplacement égal à $10^{-3} mm$. La résolution est effectuée avec le logiciel Matlab.

Ce modèle d'endommagement nécessite la donnée des deux paramètres matériels s_0 et S_0 . En général, s_0 est pris égal à 1, Habraken (2001). C'est la valeur que nous choisissons ici. S_0 est choisi égal à $1 MPa$. Notons que cette valeur influence notablement l'évolution de l'endommagement. D'après (5.16), plus S_0 est faible, plus l'accroissement de D est rapide. Les autres caractéristiques matérielles sont les mêmes que dans le cas du comportement non endommageant.

Les simulations sont effectuées dans les conditions suivantes :

- Valeur initiale de l'endommagement égale à 0, et comportement indépendant du temps,
- Valeur initiale de l'endommagement égale à 0.1, et comportement indépendant du temps,
- Valeur initiale de l'endommagement égale à 0, comportement dépendant du temps, et vitesse de déplacement de $0.1 mm.s^{-1}$,
- Valeur initiale de l'endommagement égale à 0.1, comportement dépendant du temps, et vitesse de déplacement de $0.1 mm.s^{-1}$.

L'évolution de l'endommagement est présentée Fig. 5.5. Sur ce graphe, *ep* signifie comportement élasto-plastique. Par ailleurs, les abréviations *simul* et *analy* signifient respectivement 'résultat issu de la simulation numérique' et 'résultat semi-analytique'. d_0 est la valeur initiale de l'endommagement.

Pour un essai effectué à une même vitesse, mais avec une valeur initiale d_0 différente, la courbe d'évolution de D est la même, mais elle est translatée de la quantité d_0 . En revanche, lorsque la vitesse de déformation augmente, l'accroissement de l'endommagement est plus rapide, ce qui traduit bien la relation (5.16).

Les courbes d'écrouissage obtenues sont présentées Fig. 5.6.

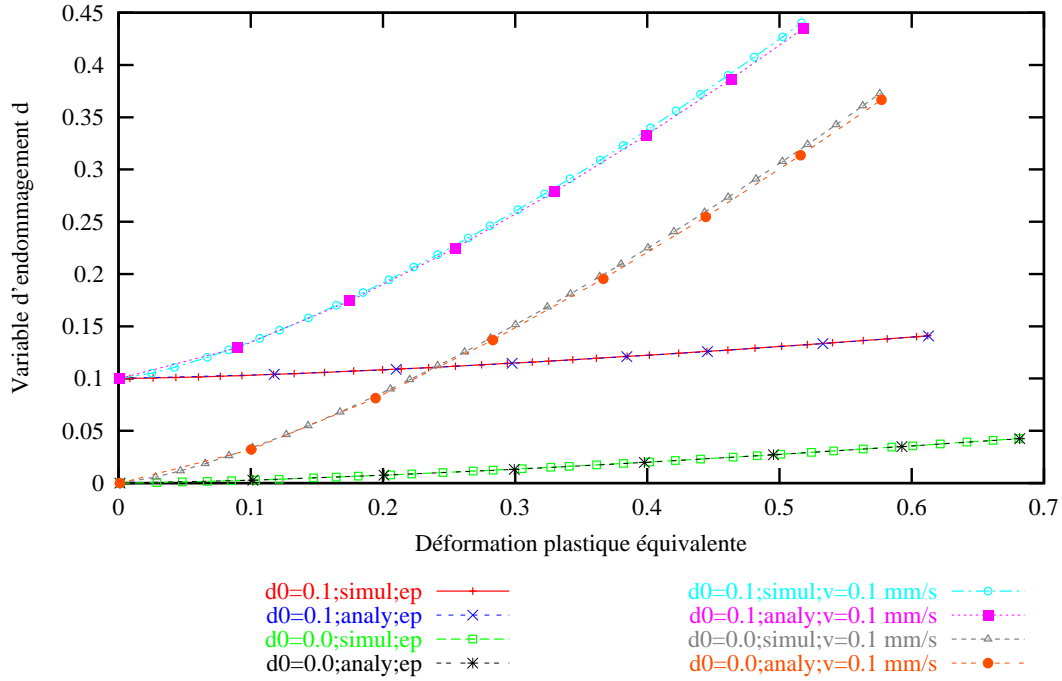


FIG. 5.5 – Evolution de l'endommagement en traction uniaxiale pour un comportement plastique ou viscoplastique, et pour deux valeurs initiales d'endommagement.

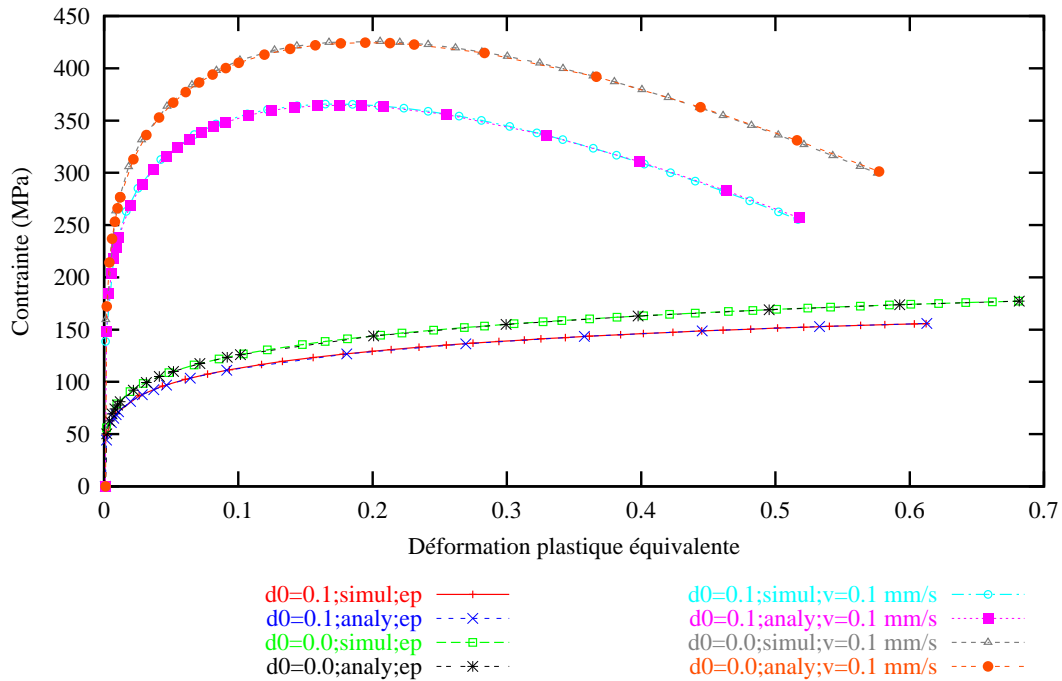


FIG. 5.6 – Courbes d'écroutissage en traction uniaxiale pour un comportement plastique ou viscoplastique, et pour deux valeurs initiales d'endommagement.

Pour une même vitesse de déplacement, une valeur d'endommagement initiale plus faible entraîne une diminution du niveau de contraintes. Le fait que l'évolution de l'endommagement soit directement liée à la vitesse de déformation se traduit sur les courbes d'écrouissage par une chute des contraintes intervenant plus rapidement au cours de la déformation. Les résultats numériques sont en accord avec les résultats attendus.

Notons enfin que la convergence du calcul sur cet essai élémentaire est identique au cas du comportement non endommageant. L'équilibre global est atteint en trois itérations maximum.

5.1.4 Modèle de type Gurson

On considère à présent un couplage déformations-endommagement par le modèle de type Gurson présenté au chapitre 3.

On peut obtenir une solution semi-analytique en intégrant le système d'équations différentielles donnant l'évolution des variables internes en fonction de la déformation. La formulation semi-analytique est présentée dans l'annexe E.

Les valeurs des différents coefficients de ce modèle sont données Tab. 5.3. La nucléation est pilotée en déformation. On ne considère pas la phase de coalescence pour ce calcul. Par ailleurs, la loi d'écrouissage est la même que dans le cas du comportement non endommageable.

Grandeur	Valeur
q_1	1.5
q_2	1
q_3	2.25
ε_n	0.2
s_n	0.1
f_n	0.04

TAB. 5.3 – Valeurs des coefficients du modèle de type Gurson pour l'essai de traction uniaxiale.

L'évolution de la fraction volumique de cavités est présentée Fig. 5.7. Les différentes simulations proposées sur ce graphe sont les suivantes :

- Fraction volumique initiale $f_0 = 10^{-5}$ sans prise en compte de la nucléation,
- Fraction volumique initiale $f_0 = 0.05$ sans prise en compte de la nucléation,
- Fraction volumique initiale $f_0 = 10^{-5}$ avec prise en compte de la nucléation,
- Fraction volumique initiale $f_0 = 0.05$ avec prise en compte de la nucléation,

Si on ne prend pas en compte la phase de nucléation, l'évolution de la fraction volumique est moins importante. Par ailleurs, pour une fraction volumique initiale différente, on obtient une évolution de la fraction volumique similaire mais translatée de la quantité f_0 .

Nous pouvons constater la très bonne corrélation entre les résultats issus de la simulation et les résultats semi-analytiques. Par ailleurs, la convergence du calcul n'est pas affectée par l'accroissement de f , même dans le cas où $f_0 = 0.05$. La convergence du calcul est obtenue en trois ou quatre itérations par incrément. Ceci est dû à l'utilisation de l'opérateur tangent cohérent. En effet, l'utilisation d'un module tangent standard entraîne

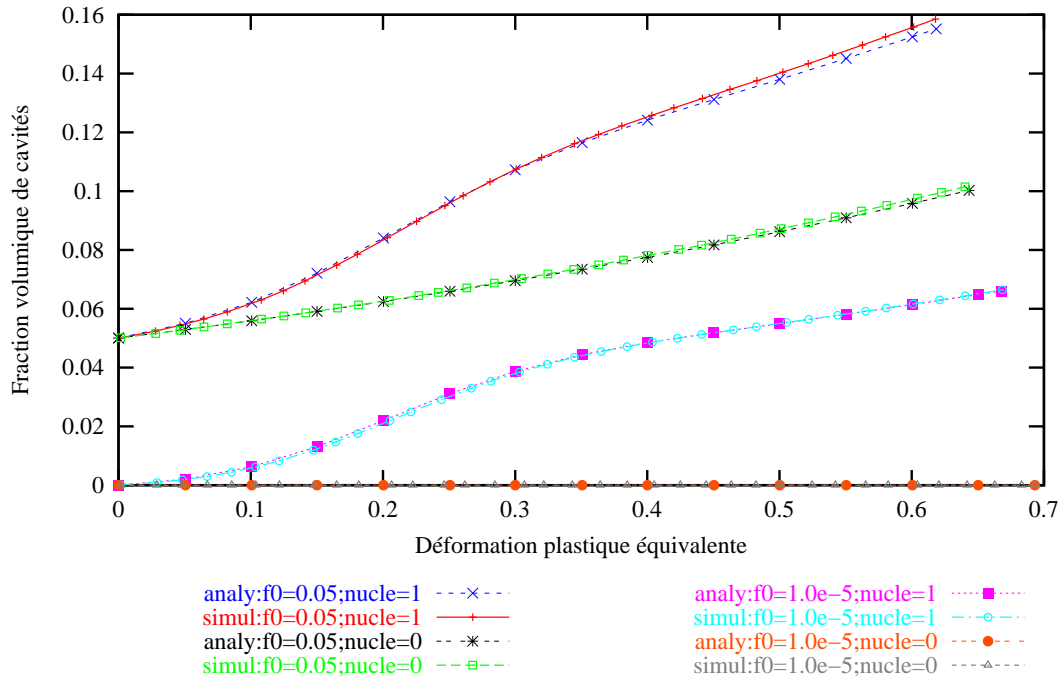


FIG. 5.7 – Courbes d'évolution de la fraction volumique de cavités avec ou sans prise en compte de la nucléation, et pour deux valeurs de la fraction volumique initiale de cavités.

une diminution de la vitesse de convergence. Pour cet essai élémentaire, nous obtenons une convergence avec ce type d'opérateur en une dizaine d'itérations seulement.

Ce premier calcul élémentaire a permis de confronter les résultats issus de la simulation numérique avec une solution analytique ou semi-analytique. On obtient une excellente concordance entre les deux approches. Par ailleurs, le comportement attendu est correctement reproduit. Un deuxième test élémentaire est proposé dans la section suivante, celui du cisaillement simple.

5.2 Essai de cisaillement simple

5.2.1 Description du test

Puisque le mode de déformation prépondérant en découpage est un mode de déformation en cisaillement, nous traitons un exemple élémentaire de cisaillement simple. L'objectif, comme pour l'essai précédent, est de valider les modèles de comportement développés.

On considère un patch test de quatre éléments soumis à un essai de cisaillement simple, Fig. 5.8. On adopte une hypothèse de déformations planes. L'algorithme quasi-statique implicite est utilisé, et le chargement total est décomposé en incréments de déplacement égaux de $5 \cdot 10^{-3}$ mm.

5.2.2 Solution analytique

Le déplacement imposé est noté \bar{u}_x .

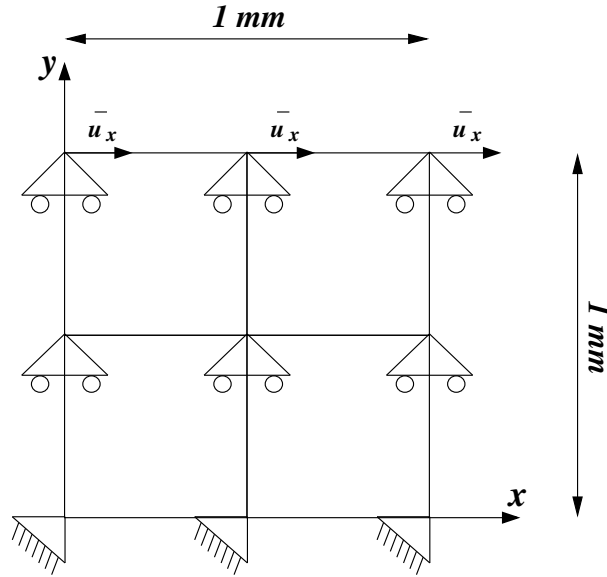


FIG. 5.8 – Conditions aux limites et géométrie de l'essai de cisaillement simple.

La position pour chaque point matériel de l'élément est donnée à l'instant t par :

$$\begin{cases} x(t) = X + \bar{u}_x(t)Y \\ y(t) = Y \end{cases} \quad (5.18)$$

Où (X, Y) représentent les coordonnées initiales du point.

D'où :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \bar{u}_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \dot{F}F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\bar{u}}_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

En négligeant comme précédemment les déformations élastiques :

$$D \simeq D^p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\bar{u}}_x}{2} \\ \frac{\dot{\bar{u}}_x}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

On obtient alors :

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\dot{\bar{u}}_x}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon}^p = \frac{\bar{u}_x}{\sqrt{3}} \quad (5.21)$$

Par ailleurs, puisque D^p et s ont même direction, s étant le déviateur du tenseur des contraintes de Cauchy, on peut écrire que :

$$s = \begin{bmatrix} 0 & s_{xy} \\ s_{xy} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

La seule composante non nulle du déviateur des contraintes est donc la composante de cisaillement $s_{xy} = \sigma_{xy}$. Il en résulte que :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} = \sqrt{3} \sigma_{xy} \quad (5.23)$$

La contrainte d'écoulement, qui dépend le cas échéant de la vitesse de déformation et de la température, est notée comme précédemment σ_0 . On obtient finalement, en utilisant le critère de von Mises :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 \quad (5.24)$$

Concernant les autres composantes du tenseur des contraintes, la nullité des termes diagonaux de s impose que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$. Si le déplacement imposé est faible, celles-ci sont négligeables devant la contrainte de cisaillement.

Les relations (5.21) et (5.24) permettent d'obtenir une courbe analytique qui sera comparée à la courbe numérique.

5.2.3 Résultats

- Comportement élasto-viscoplastique non endommageant.

Le comportement matériel est le même que pour l'essai de traction, Tab. 5.1, Tab. 5.2. Les conditions d'essai sont indiquées Tab. 5.4.

Grandeur	Symbole	Valeur
Déplacement imposé	\bar{u}_x	0.5 mm
Vitesse d'essai	$\dot{\bar{u}}_x$	1.0 mm.ms ⁻¹ , 10 ⁻¹ mm.ms ⁻¹ , 10 ⁻² mm.ms ⁻¹

TAB. 5.4 – Vitesses et déplacement imposés pour l'essai de cisaillement simple.

Les comparaisons entre les solutions numérique et analytique sont présentées Fig. 5.9. Comme pour l'essai élémentaire de traction, l'influence de la vitesse de déformation est correctement reproduite, puisque l'on obtient un accroissement du niveau de contrainte avec la vitesse.

- Comportement élasto-viscoplastique avec endommagement.

Le mode de déformation principal sur ce problème est un mode de cisaillement. L'évolution de l'endommagement étant liée au taux de triaxialité, celle-ci sera faible si le déplacement imposé reste faible (taux de triaxialité négligeable). Toutefois, pour un déplacement plus important (tel que celui imposé ici), on a un mode de déformation en traction conjointement au mode de cisaillement dû au fait qu'il s'agit d'un problème de cisaillement simple et non de cisaillement pur. On observe alors un accroissement de l'endommagement avec la déformation.

Cet essai illustre de façon simplifiée le mécanisme de déformation qui intervient en découpage. Dans la zone située entre les arêtes poinçon et matrice, on peut en effet en première approche considérer le mode de déformation comme un mode de déformation en cisaillement simple.

Le calcul de cisaillement simple, tout comme le calcul de traction précédent, montre une excellente concordance entre la solution numérique et la solution analytique. Le comportement du matériau est correctement simulé. En outre, le problème de cisaillement simple constitue une représentation simplifiée de la déformation de la tôle en découpage. On observe une évolution de l'endommagement dans la zone cisailée due au fait qu'il existe un mode de déformation en traction parallèlement au mode de cisaillement.

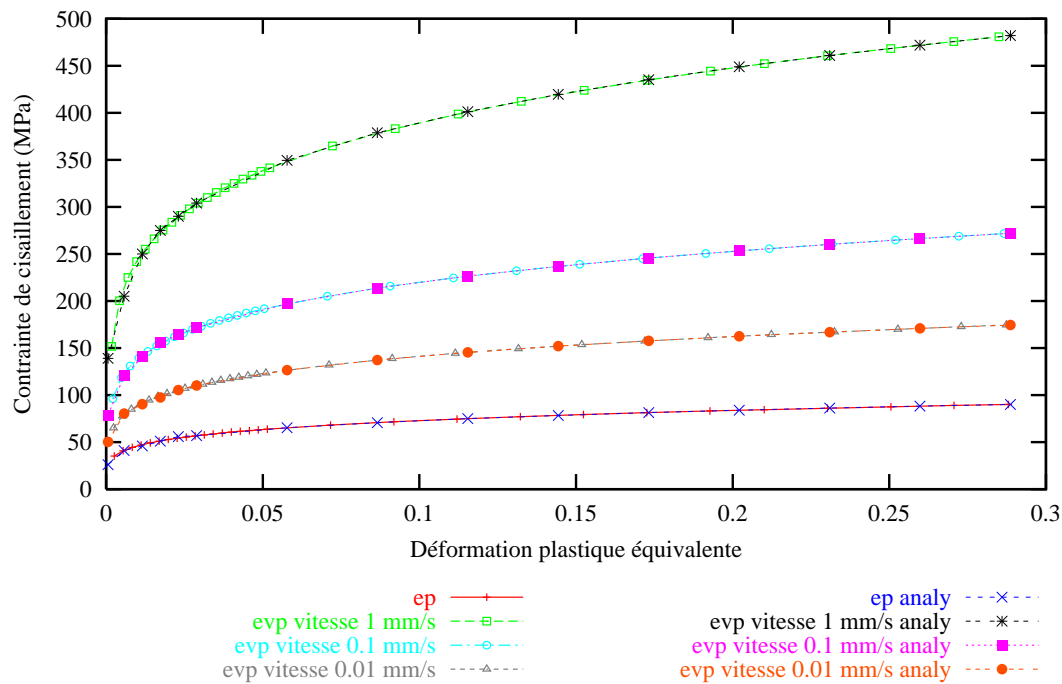


FIG. 5.9 – Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse (ep : modèle élasto-plastique, evp : modèle élasto-viscoplastique).

Dans l'essai de traction de la section suivante, les approches couplée et non couplée sont évaluées pour la prédiction de l'endommagement ductile.

5.3 Traction uniaxiale d'une éprouvette

5.3.1 Description du test

Le problème d'une éprouvette de section rectangulaire soumise à une traction uniaxiale est étudié. On adopte une hypothèse de déformations planes. On doit observer une localisation de la déformation dans deux bandes de cisaillement orientées d'environ 45° par rapport à l'axe de traction, Mariage (2003). L'objectif est de confronter brièvement les approches couplées et non couplées sur ce type de problème.

Nous reprenons la géométrie proposée par Mariage (2003), cf. Fig. 5.10.

L'éprouvette est soumise à un déplacement imposé \bar{u} dans la direction y . La valeur de \bar{u} dépend de la rupture de l'éprouvette et n'est donc pas précisée ici.

Le maillage est composé de 1281 nœuds et 600 éléments triangulaires quadratiques à 6 nœuds. 6 points de Gauss sont utilisés pour cet élément. La taille de maille initiale est égale à 1 mm.

Pour cet essai, l'algorithme quasi-statique implicite est utilisé avec des incréments de déplacement de 0.015 mm. Le remaillage est inactif.

Nous choisissons deux types de modèle de comportement pour le matériau, suivant que l'on considère ou non le couplage avec l'endommagement. Le modèle couplé retenu est celui de type Lemaître. La courbe d'écrouissage est définie par la fonction suivante :

$$\sigma_0 = (1 - \beta D)(\sigma_y + k(\bar{\varepsilon}^p)^n) \quad (5.25)$$

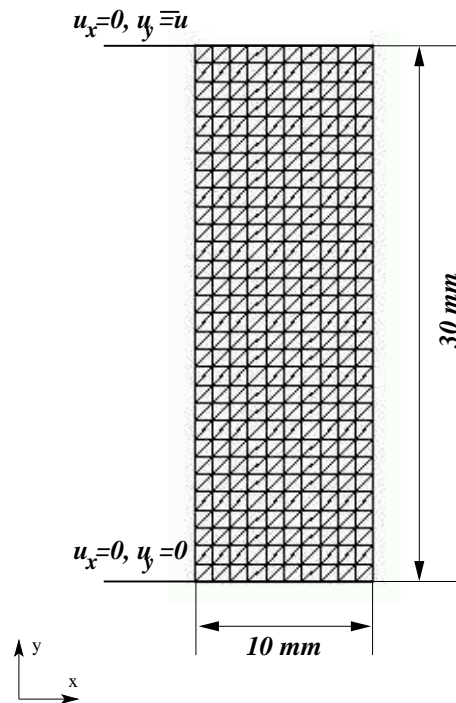


FIG. 5.10 – Géométrie, maillage et conditions aux limites pour l'éprouvette de traction.

où $\beta = 1$ pour le modèle couplé et $\beta = 0$ pour le modèle non couplé.

L'ensemble des caractéristiques mécaniques est donné Tab. 5.5. Les paramètres S_0 et s_0 sont ceux intervenant dans le modèle d'endommagement. Ils ne correspondent pas à un matériau réel.

Grandeur	Valeur
E	210 000 MPa
ν	0.3
σ_y	294 MPa
k	185 MPa
n	0.354
s_0	1
S_0	1 MPa

TAB. 5.5 – Caractéristiques mécaniques du matériau pour l'éprouvette de traction.

Remarque

La rupture complète de l'éprouvette n'est pas étudiée sur ce problème. En effet, comme nous le verrons par la suite, la rupture s'initie au centre de l'éprouvette. Or, les méthodes d'analyse de la rupture exposées au chapitre 4 ne sont valables que pour des fissures s'amorçant sur les bords d'une structure. Par conséquent, nous nous limiterons à la prédiction de l'endommagement ductile.

5.3.2 Résultats

Nous nous intéressons dans un premier temps aux résultats obtenus avec le modèle couplé. La distribution de la déformation plastique équivalente est présentée Fig. 5.11, pour deux instants de chargement. Le même type de résultat est présenté pour la variable d'endommagement D sur la Fig. 5.12. On constate sur ces deux figures que le développement de l'endommagement conduit à l'apparition d'une striction, (Fig. 5.11)_a et (Fig. 5.12)_a. La localisation de la déformation dans deux bandes de cisaillement orientées à 45° par rapport à l'axe de traction est ensuite effectivement prédite, (Fig. 5.11)_b et (Fig. 5.12)_b. Une des deux bandes est rapidement privilégiée par rapport à l'autre. Comme l'indique Mariage (2003), ceci est dû à la dépendance au maillage éléments finis pour ce type de problème². Enfin, comme attendu, la variable d'endommagement est maximale au centre de l'éprouvette.

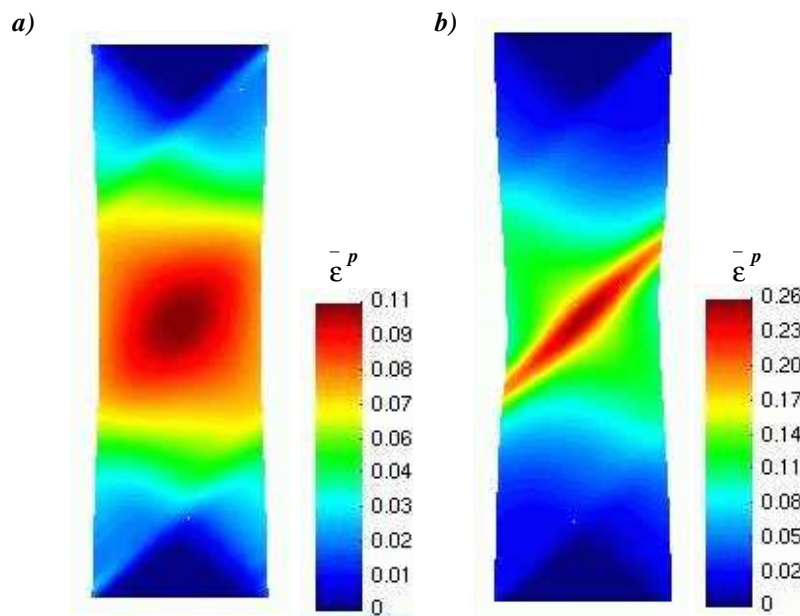


FIG. 5.11 – Distribution de la déformation plastique équivalente pour le modèle couplé. a) Déplacement 1.5 mm (allongement de 5 %) ; b) Déplacement 2.1 mm (allongement de 7 %).

Les résultats obtenus pour le modèle non couplé sont présentés Fig. 5.13. On constate que la localisation n'est pas prédite. Ce type d'approche est donc inadapté pour ce calcul.

Enfin, les courbes d'effort obtenues dans les deux cas sont comparées, Fig. 5.14. La chute de l'effort est nettement plus marquée dans le cas du modèle couplé. Ceci est dû au fait que la prise en compte de l'endommagement affecte les propriétés mécaniques du matériau. La chute plus douce observée dans le cas d'un modèle découplé est quant à elle due à la diminution de section dans la zone centrale de l'éprouvette, Mariage (2003).

Cet essai a permis d'évaluer les approches couplée et non couplée dans le cas où l'endommagement ductile ne peut être négligé. L'objectif du problème suivant est de tester les méthodes proposées pour le traitement de la rupture ductile.

²Des solutions existent pour diminuer cette dépendance. Les méthodes non locales ou les modèles à gradient en font partie. Ce type de modélisation n'a pas été envisagé.

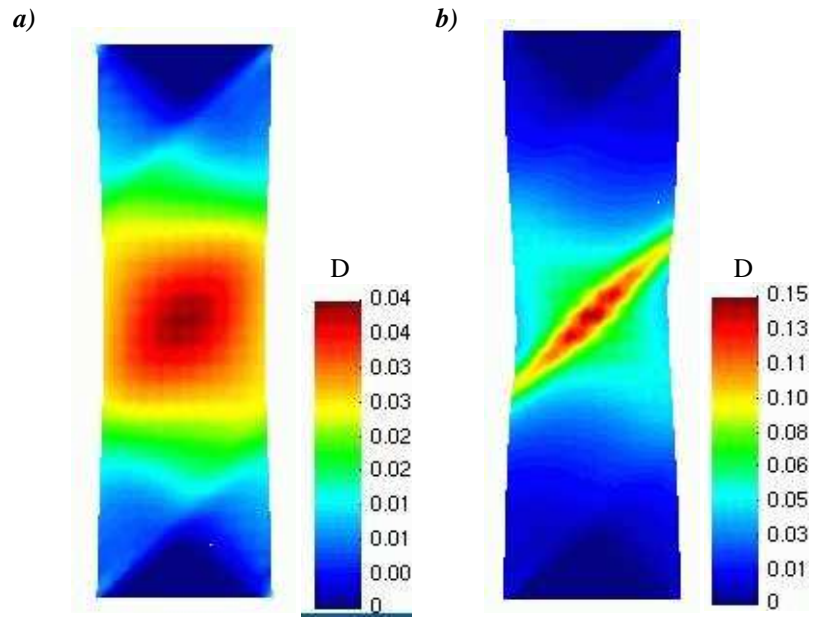


FIG. 5.12 – Distribution de la variable d'endommagement D pour le modèle couplé. a) Allongement de 5 %; b) Allongement de 7 %.

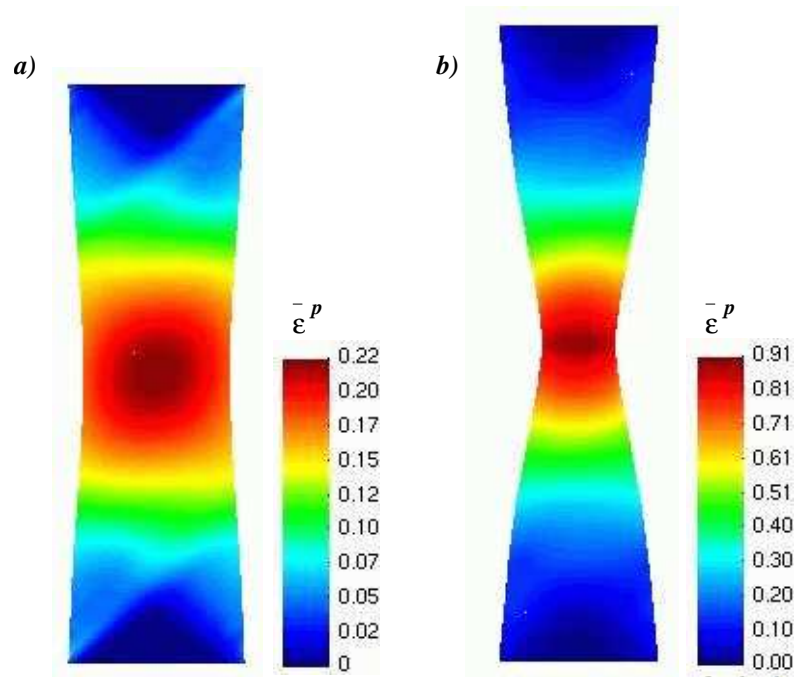


FIG. 5.13 – Distribution de la déformation plastique équivalente pour le modèle non couplé. a) Allongement de 10 %; b) Allongement de 33 %.

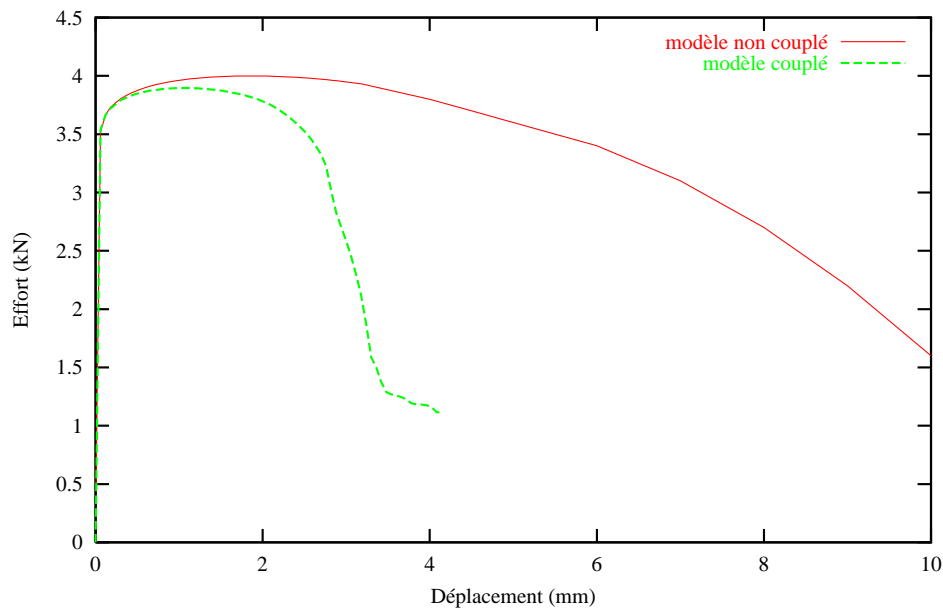


FIG. 5.14 – Comparaison des courbes effort-déplacement pour les modèles couplé et non couplé.

5.4 Traction d'une plaque non symétrique

5.4.1 Description du test

L'objectif de ce calcul est de comparer les deux méthodes de rupture implémentées, à savoir la méthode d'élimination des éléments et la méthode de propagation de fissures, cf. chapitre 4. Ce problème a été présenté par Brokken (1999). L'auteur utilise ce calcul pour valider sa propre méthode de propagation de fissures. Ne disposant pas d'informations expérimentales sur ce problème, on se limitera à une analyse qualitative. Les caractéristiques propres aux deux méthodes seront mises en évidence.

On considère une plaque carrée de côté 1 mm en déformations planes, cf. Fig. 5.15. Le côté supérieur et le côté gauche de la plaque sont soumis à un déplacement imposé dans la direction y . Les côtés inférieur et droit sont encastres. Brokken indique que la géométrie particulière de ce problème, avec deux entailles de dimensions différentes, permet d'obtenir un trajet de fissure courbe qui résulte du développement d'une bande de cisaillement diagonale entre les deux entailles, Brokken (1999).

Le maillage initial de la plaque est représenté Fig. 5.16. La taille de maille moyenne est choisie égale à 0.04 mm. Le maillage est composé de 1172 éléments triangulaires à 6 nœuds et 2443 nœuds. Le maillage choisi est volontairement assez grossier pour diminuer le temps de calcul. Par ailleurs, les caractéristiques des méthodes de rupture seront clairement mises en évidence sur ce type de maillage.

Pour le matériau, nous reprenons les caractéristiques mécaniques fournies par Brokken (1999). Ce sont celles d'un acier inoxydable X30Cr13. La courbe d'écrouissage est définie par l'équation suivante :

$$\sigma_0 = \sigma_y + H_1 \left(1 - \exp\left(\frac{-\bar{\varepsilon}^p}{H_2}\right)\right) + H_3 \sqrt{\bar{\varepsilon}^p} \quad (5.26)$$

Les caractéristiques mécaniques sont consignées dans le Tab. 5.6.

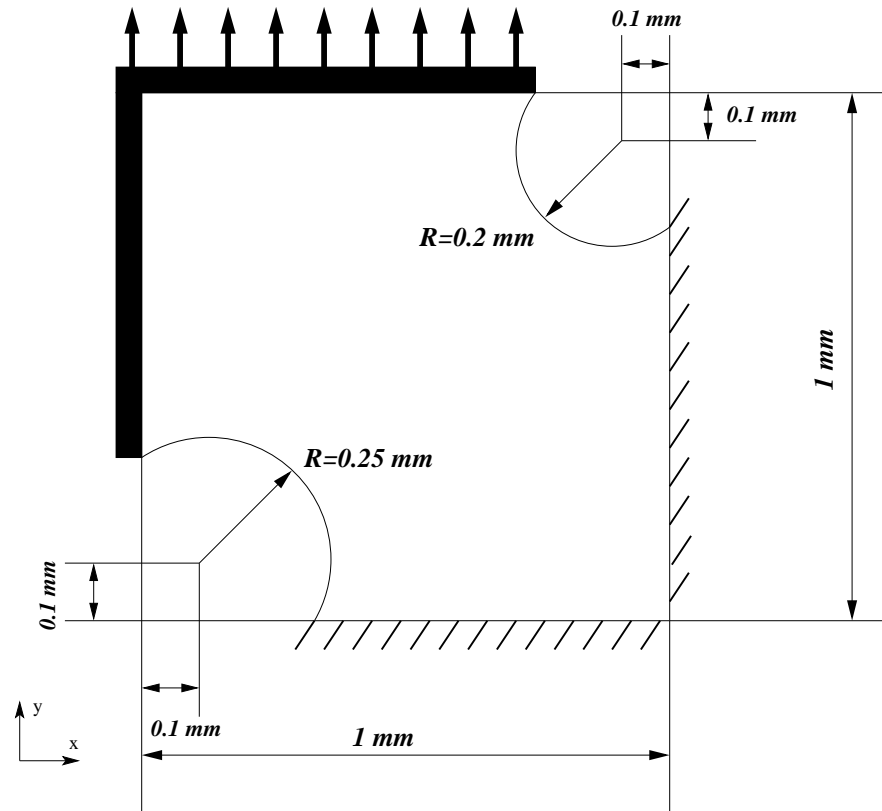


FIG. 5.15 – Géométrie initiale et conditions aux limites du problème d'une plaque non symétrique en traction, d'après Brokken (1999).

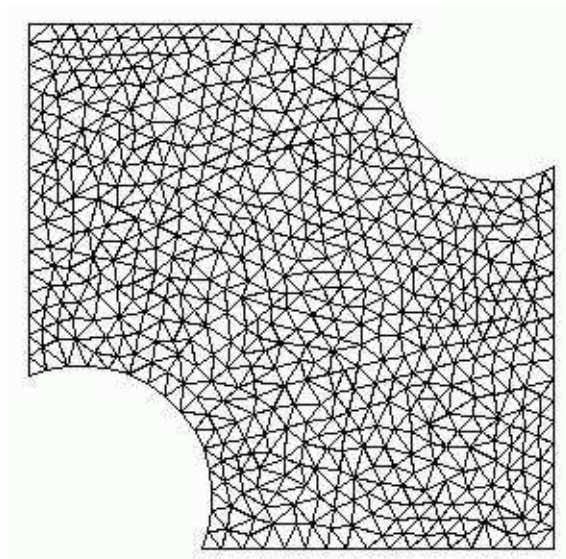


FIG. 5.16 – Maillage initial de la plaque.

Grandeur	Valeur
E	180 000 MPa
ν	0.28
σ_y	368 MPa
H_1	119 MPa
H_2	0.027
H_3	520 MPa

TAB. 5.6 – Caractéristiques mécaniques d'un acier inoxydable X30Cr13.

Nous utiliserons le même critère de rupture que celui proposé par Brokken (1999). Celui-ci est basé sur le critère de Oyane et prend la forme suivante :

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} \left\langle 1 + 3 \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right\rangle d\bar{\varepsilon}^p \leq D_C \quad (5.27)$$

où $D_C = 2.4$ pour le matériau utilisé.

Pour cet essai, l'algorithme quasi-statique implicite est utilisé. Le chargement est décomposé en incréments de déplacement de $2.5 \cdot 10^{-3}$ mm. Le remaillage n'est activé que lors de l'étape de propagation d'une fissure ou d'élimination d'un élément. La taille de maille moyenne imposée lors du remaillage est la même que pour le maillage initial, soit 0.04 mm, excepté pour les zones situées autour d'une fissure. La taille de maille dans ces zones sera indiquée par la suite.

5.4.2 Prédiction de l'amorçage d'une fissure

La distribution au moment de l'amorçage d'une fissure de la valeur critère d'endommagement défini précédemment est représentée Fig. 5.17.

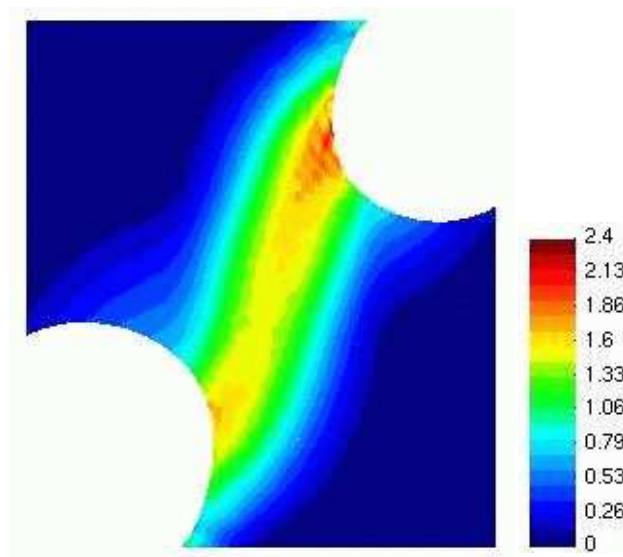


FIG. 5.17 – Distribution de la valeur critère d'endommagement pour un déplacement égal à 0.12 mm (allongement de 12 %).

Cette distribution est similaire à celle obtenue par Brokken. Le lieu d'amorçage d'une fissure se situe sur l'entaille de plus petit rayon, c'est-à-dire celle située dans le coin supérieur droit. L'amorçage est détecté pour un déplacement de 0.12 mm, contre 0.11 mm obtenu par Brokken. Enfin, on observe que la trajectoire correspondant à la zone de plus fort endommagement correspond à une trajectoire courbe dirigée d'une entaille à l'autre. Là encore, les résultats concordent qualitativement avec ceux présentés par Brokken.

A partir de ce déplacement, on envisage l'étude de la rupture par la méthode d'élimination des éléments, puis par la méthode de propagation de fissures.

5.4.3 Méthode d'élimination des éléments

Le paramètre à définir lors de l'étape d'élimination d'un élément est la taille de maille pour la partie du contour définie par l'élément supprimé. Cette taille est fixée à 0.005 mm.

Les résultats obtenus pour des déplacements respectifs de 0.13 mm, 0.138 mm et 0.142 mm sont présentés Fig. 5.18. On observe sur ces figures que la fissure a tendance à se propager dans la direction de la seconde entaille. Les résultats exposés par Brokken ne concernent que le début de la propagation de la fissure. Le trajet de propagation obtenu est similaire à celui représenté sur la Fig. 5.18.

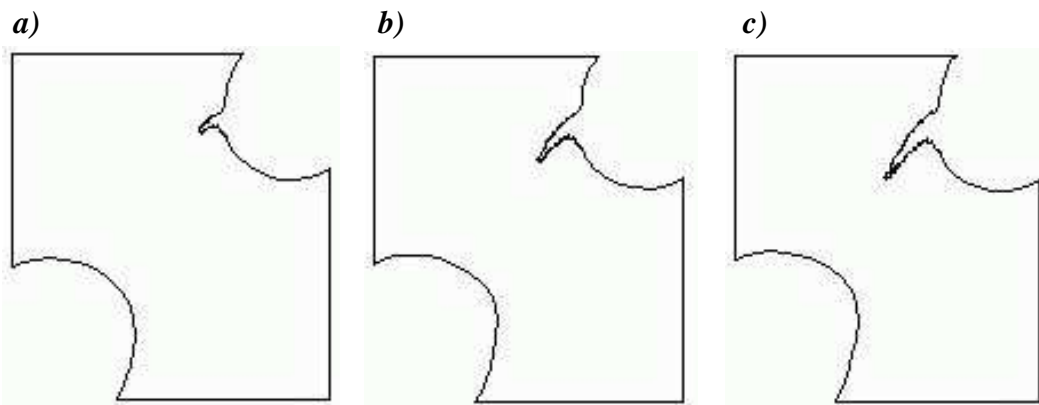


FIG. 5.18 – Propagation de fissure obtenue par élimination des éléments. a) Déplacement de 0.13 mm ; b) Déplacement de 0.138 mm ; c) Déplacement de 0.142 mm.

On peut toutefois noter la dépendance de la méthode d'élimination des éléments au maillage éléments finis. Le maillage initial n'est pas suffisamment fin au niveau des entailles. Ceci entraîne, au début du calcul de propagation, une approximation assez grossière des dimensions de la fissure, (*Fig. 5.18*)_a. Lorsque la fissure se propage, les dimensions de la zone supprimée sont plus réduites, (*Fig. 5.18*)_b et (*Fig. 5.18*)_c. Ceci est dû au raffinement du maillage en pointe de fissure.

La taille du maillage est également critique en ce qui concerne la convergence de l'algorithme implicite. La suppression du premier élément de taille 0.04 mm rend difficile le retour à l'équilibre global de la structure. La convergence est obtenue après une trentaine d'itérations contre 6 ou 7 pour un incrément de chargement sans propagation de fissure. Lorsque les éléments supprimés ont pour taille de maille 0.005 mm, le retour à l'équilibre est obtenu en une douzaine d'itérations.

Compte tenu du caractère approximatif de la solution pour ce maillage éléments finis, nous choisissons de ne pas mener le calcul à son terme par cette méthode. Notons cependant que le trajet de propagation est qualitativement cohérent avec celui obtenu par Brokken.

5.4.4 Méthode de propagation de fissures

Pour la méthode de propagation de fissures, les deux paramètres à fixer sont la taille de l'accroissement d'une fissure L et la taille de maille t_m en pointe de fissure. Pour limiter le temps de calcul, nous fixons L à 0.02 mm, et t_m égale à L . L'influence de ces deux paramètres sera ensuite discutée.

Le résultat obtenu est présenté Fig. 5.19. La rupture complète de la plaque survient pour un déplacement de 0.148 mm. Les résultats fournis par Brokken ne concernent que la première partie du calcul, (Fig. 5.19)_a. Le trajet de propagation est similaire. L'angle d'inclinaison de la fissure par rapport à l'horizontale est cependant plus marqué pour Brokken (1999). En l'absence d'éléments de comparaison sur la suite du calcul, nous nous limitons à décrire les résultats obtenus et les caractéristiques de notre méthode de propagation de fissures.

Pour un déplacement de 0.146 mm, une seconde fissure est amorcée sur la seconde entaille, (Fig. 5.19)_b. Les deux fissures vont alors rapidement se propager en direction l'une de l'autre, (Fig. 5.19)_c. La rupture complète n'est pas simulée car la propagation d'une fissure sur un bord de la pièce n'est pas disponible.

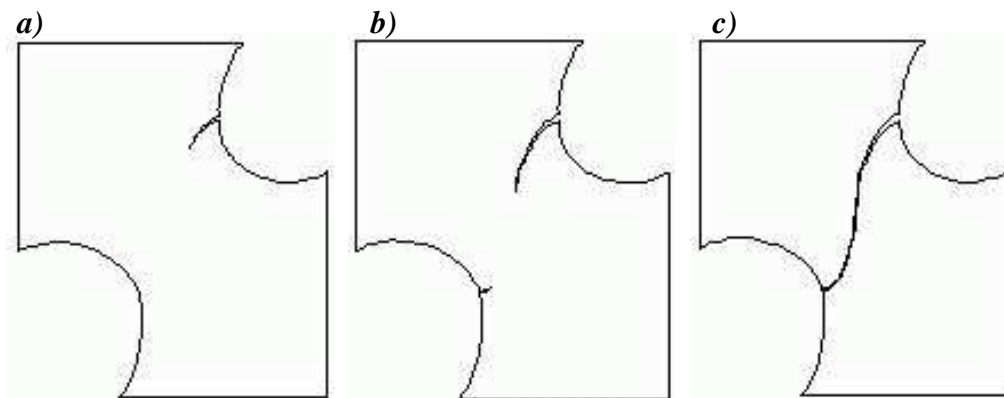


FIG. 5.19 – Propagation des fissures dans la plaque. a) Déplacement de 0.138 mm ; b) Déplacement de 0.146 mm ; c) Déplacement de 0.148 mm.

La distribution de la variable d'endommagement calculée à partir du critère de type Oyane est présentée Fig. 5.20. On constate que les deux fissures se sont effectivement propagées dans la direction d'endommagement maximal. Sur cette figure, certains éléments satisfont au critère de rupture (valeur d'endommagement égale à 2.86 pour une valeur critique à rupture de 2.4.) Ceci est dû au fait que ces éléments se situent sur les lèvres d'une fissure, et que l'amorçage d'une nouvelle fissure dans cette zone est interdit.

Le trajet de propagation obtenu pour $L=0.02$ mm et $L=0.06$ mm est comparé, Fig. 5.21. On constate que les deux trajets sont qualitativement comparables. Le trajet calculé avec $L=0.06$ mm est cependant plus irrégulier. Ceci s'explique par le fait que l'augmentation de la longueur L entraîne une discrétisation plus grossière de la fissure étudiée. Un autre calcul a été effectué avec une longueur $L=0.01$ mm. Les résultats sont

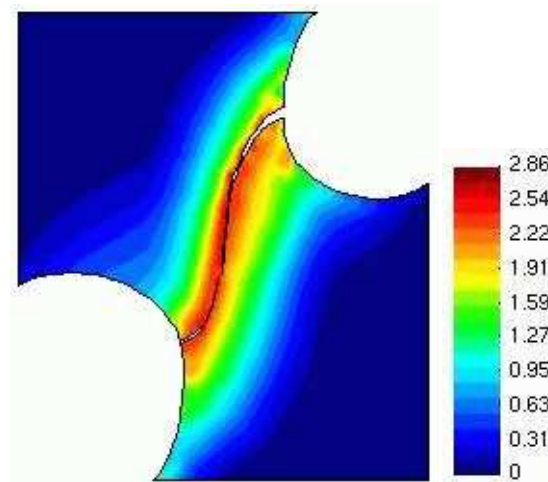


FIG. 5.20 – Distribution de la fonction critère d'endommagement pour un déplacement égal à 0.148 mm.

très proches de ceux obtenus avec $L=0.02$ mm. Il est néanmoins difficile de fixer une règle générale pour la détermination de la longueur L optimale. Celle-ci est à déterminer pour chaque problème.

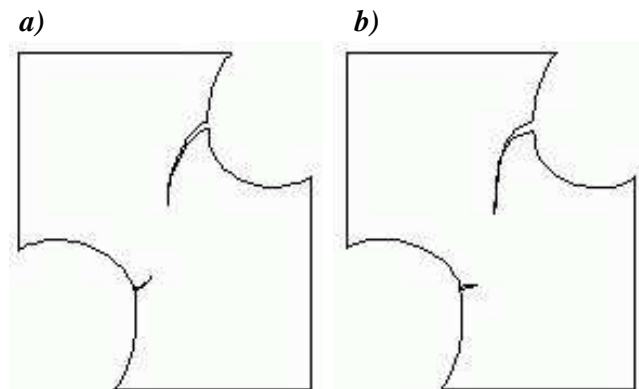


FIG. 5.21 – Comparaison du trajet de propagation pour un accroissement L de a) 0.02 mm ; b) 0.06 mm.

L'influence de la taille de maille t_m est maintenant analysée. On fait varier t_m de une à deux fois la longueur $L=0.02$ mm. Les trajets de propagation obtenus sont présentés Fig. 5.22. L'inclinaison de la fissure vers la seconde entaille est plus marquée pour $t_m=0.04$ mm. Ceci vient du fait que moins d'éléments interviennent dans le calcul de la direction de propagation. Par conséquent, l'influence des éléments situés dans la zone la plus endommagée est moins pondérée que pour $t_m=0.02$ mm. On peut cependant noter que même pour une taille d'élément grossière en pointe de fissure (8 fois plus importante que pour la méthode d'élimination des éléments), le trajet de propagation est qualitativement cohérent. La diminution de la taille t_m en pointe de fissure a également été étudiée. Pour $t_m=0.5L$, le trajet de propagation est très similaire à celui obtenu avec $t_m=L$. La détermination précise de la taille de maille optimale en pointe de fissure nécessiterait une étude plus approfondie. Nous retiendrons pour les problèmes suivant le rapport $\frac{t_m}{L} = 1$ comme rapport maximal à utiliser.

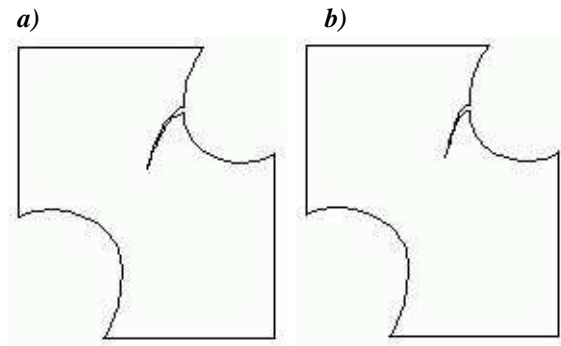


FIG. 5.22 – Comparaison du trajet de propagation pour une taille de maille en pointe de fissure de a) 0.02 mm ; b) 0.04 mm.

La méthode de propagation de fissures s'avère sur cet exemple moins contraignante que la technique d'élimination des éléments pour la convergence de l'algorithme implicite. Le retour à l'équilibre est obtenu en une dizaine d'itérations. Le calcul est mené à son terme en 52 min pour les paramètres $L=0.02$ mm et $t_m=0.02$ mm (sur un processeur pentium 4 cadencé à 2.4 GHz), en 34 min pour $L=0.06$ mm et $t_m=0.02$ mm, et en 38 min pour $L=0.02$ mm et $t_m=0.04$ mm.

5.4.5 Bilan

Les deux méthodes d'analyse de la rupture ont été évaluées sur le problème d'une plaque en traction. L'amorçage d'une fissure est détecté par un critère de rupture basé sur le critère d'Oyane.

L'élimination des éléments rompus présente une forte dépendance au maillage éléments finis. De plus, lors d'un calcul implicite, la suppression d'un élément perturbe de manière significative l'équilibre de la structure. Par conséquent, il est indispensable de coupler ce type de méthode avec un maillage suffisamment fin. Cette technique est donc à utiliser avec précaution. Néanmoins, elle permet d'obtenir des résultats qualitativement cohérents.

Les résultats obtenus par la méthode de propagation de fissures sont similaires à ceux présentés par Brokken (1999). La fissure amorcée sur l'entaille de plus petit rayon se propage en direction de la seconde entaille selon une trajectoire courbe. Seul le début de propagation est présenté par Brokken. En l'absence d'autres éléments de comparaison, on ne peut conclure quant au trajet complet de rupture simulé. Cependant, celui-ci semble réaliste, dans la mesure où les deux fissures amorcées se propagent en direction l'une de l'autre pour se rejoindre et aboutir à la rupture de la plaque. Enfin, on peut noter la robustesse de la méthode de propagation de fissures. D'une part, la convergence du calcul est peu affectée par l'étape de propagation. La convergence est obtenue en une dizaine d'itérations contre 6 ou 7 sans calcul de rupture. D'autre part, l'influence du maillage en pointe de fissure est beaucoup moins prononcée que pour la méthode d'élimination des éléments. Cette technique semble donc bien adaptée à la simulation de la rupture ductile.

5.5 Test de compression : collar test

5.5.1 Description du test

Nous présentons dans cette section le calcul d'un essai de compression dit collar test. Ce calcul va permettre de confronter les résultats issus de la simulation aux données expérimentales fournies par Picart (1986). Par ailleurs, l'efficacité de l'algorithme de remaillage sera testée sur cet exemple simple. Notons que le remaillage n'est pas absolument nécessaire pour ce calcul. Cependant, le fait que la distribution des champs ne soit pas uniforme dans la pièce permet de tester la robustesse du transfert des grandeurs mécaniques d'un maillage à l'autre.

La géométrie du problème et le maillage initial sont présentés sur la Fig. 5.23, Picart (1986). On adopte une hypothèse d'axisymétrie. Etant donné la symétrie du problème, l'analyse sera limitée à un quart de l'éprouvette. On note H la demi hauteur du cylindre, c l'épaisseur de la collerette, $D_{ext} = 2R_{ext}$ et $D_{int} = 2R_{int}$ les diamètres extérieur et intérieur du cylindre, respectivement.

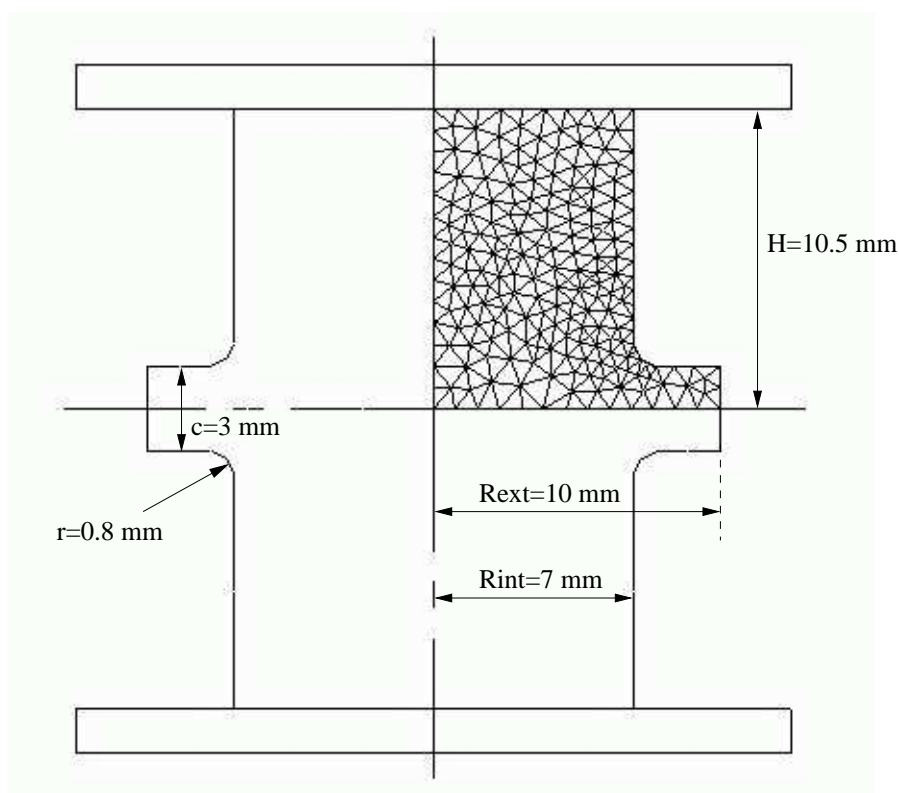


FIG. 5.23 – Géométrie et maillage initial du collar test.

Le calcul est effectué avec un maillage initial composé de 371 éléments triangulaires à 6 nœuds, soit 802 nœuds au total. La taille de maille moyenne est de 0.7 mm.

Le matériau considéré est élasto-plastique. Ses caractéristiques mécaniques sont représentées sur la Fig. 5.24.

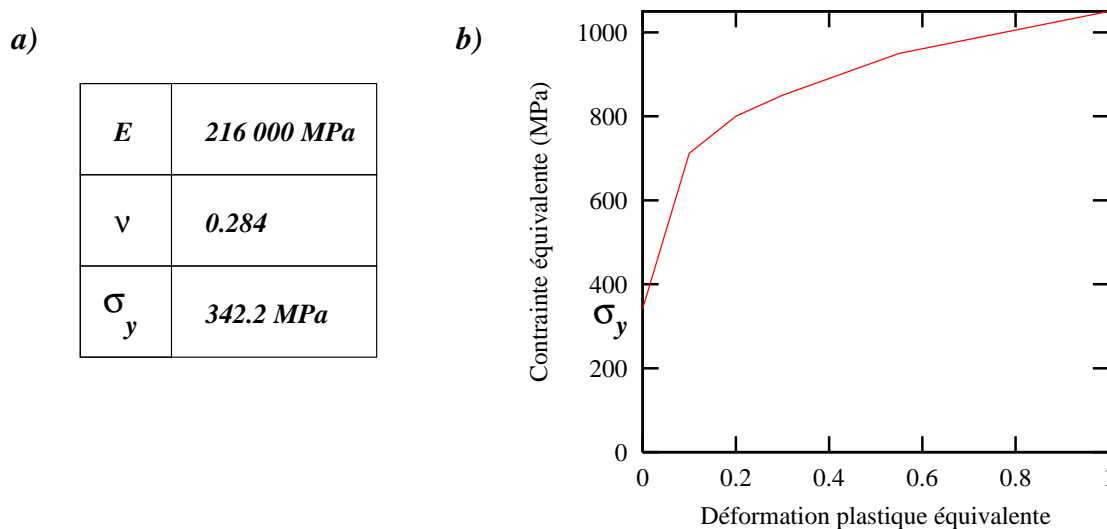


FIG. 5.24 – Caractéristiques mécaniques du matériau. a) Propriétés élastiques ; b) Courbe d'écrouissage.

On impose un déplacement total de 7.35 mm, correspondant à une réduction de hauteur de 70%. Pour ce calcul, l'algorithme dynamique explicite est utilisé. La vitesse d'essai est fixée à 5 mm.ms^{-1} . Notons que cette vitesse ne correspond pas à une vitesse réelle³.

Concernant le frottement, le coefficient de Coulomb est pris égal à 0.2.

5.5.2 Analyse qualitative de l'algorithme de remaillage

Le calcul est effectué en utilisant un critère d'activation du remaillage périodique : le remaillage global de la pièce est réalisé tous les 7 % de réduction de hauteur. La taille de maille globale imposée lors du remaillage est la même que pour le maillage initial, soit 0.7 mm.

On peut dans un premier temps comparer qualitativement la distribution des champs calculés avant et après l'étape de transport des champs. La distribution des champs de déformation plastique équivalente et de contrainte équivalente est présentée Fig. 5.25 et Fig. 5.26, pour le premier appel à l'algorithme de remaillage.

On peut noter sur ces deux figures que le transport des champs n'affecte pas notablement la distribution des champs. Qualitativement, les deux distributions sont similaires avant et après l'étape de remaillage. On constate cependant une différence plus marquée sur la distribution de la contrainte équivalente de von Mises, en particulier pour l'isovaleur 0.66 GPa environ. Cependant, même dans cette zone, l'écart relatif ne dépasse pas 2 %.

Afin d'illustrer qualitativement l'intérêt du remaillage, les déformées finales obtenues avec et sans remaillage sont présentées, Fig. 5.27.

Si l'on ne remaillie pas la pièce, de nombreux éléments sont exagérément distordus. Cette distortion excessive influence les résultats puisque c'est dans cette zone que se concentre l'essentiel des déformations et des contraintes. La courbe de chargement est également influencée. La distortion des éléments entraîne l'accroissement de leur rigidité et par suite une surestimation de l'effort de compression (non représenté).

³La raison de ce choix est d'ordre numérique. Cette vitesse permet pour ce problème d'obtenir la solution quasi-statique du problème à partir d'un algorithme d'intégration temporel explicite.

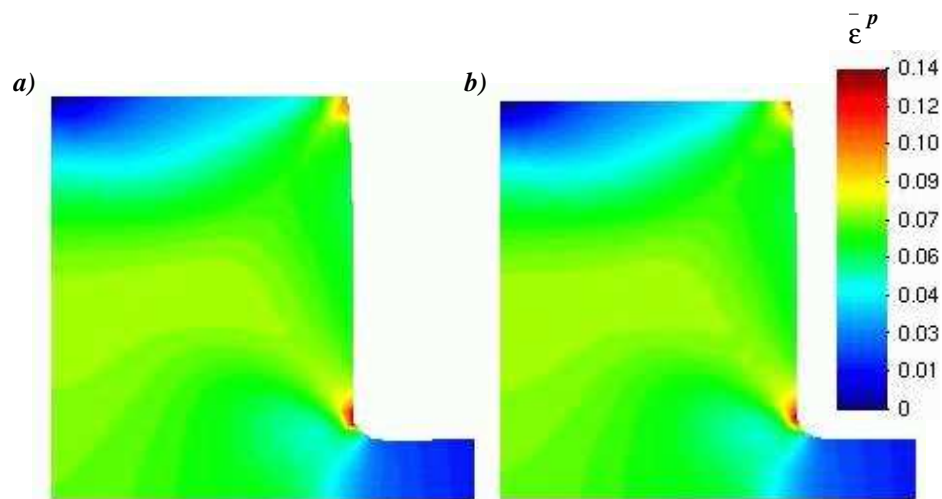


FIG. 5.25 – Distribution du champ de déformation plastique équivalente, pour une réduction de hauteur de 7%. a) Avant remaillage, b) Après remaillage.

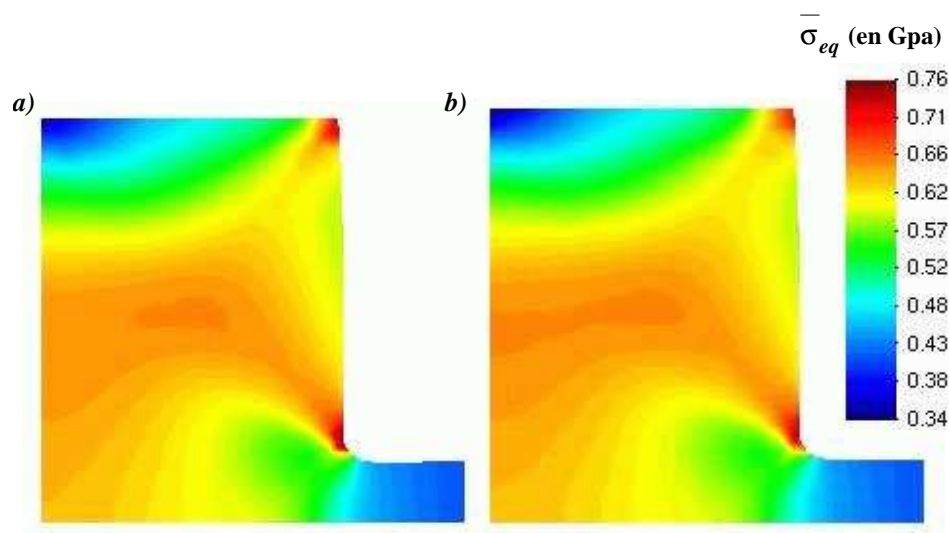


FIG. 5.26 – Distribution du champ de contrainte équivalente de von Mises, pour une réduction de hauteur de 7%. a) Avant remaillage, b) Après remaillage.

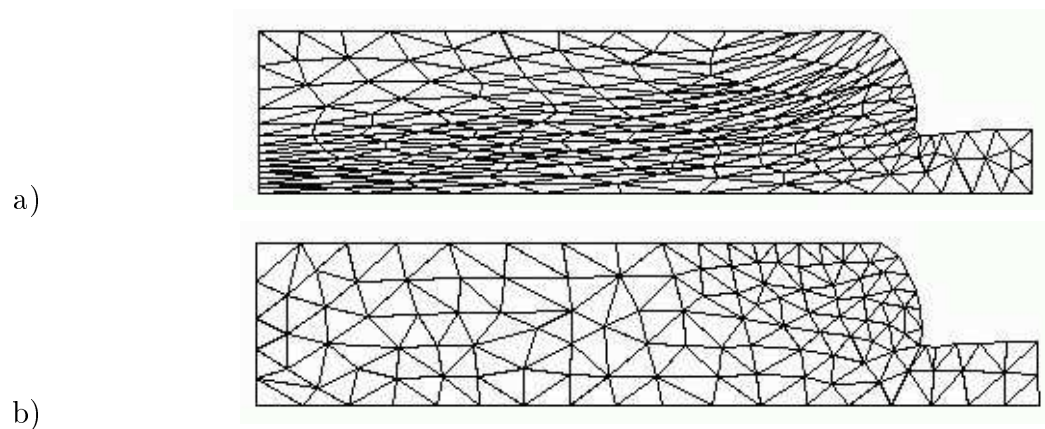


FIG. 5.27 – Comparaison des déformées pour une réduction de hauteur de 70% ; a) Sans remaillage, b) Avec remaillage (10 remaillages effectués).

5.5.3 Comparaison avec les données expérimentales

Les comparaisons effectuées avec les résultats expérimentaux fournis par Picart (1986), sont présentées, Fig. 5.28, Fig. 5.29, Fig. 5.30. Elles concernent respectivement l'évolution du diamètre extérieur D_{ext} , l'évolution de l'épaisseur c de la collerette et la courbe de chargement.

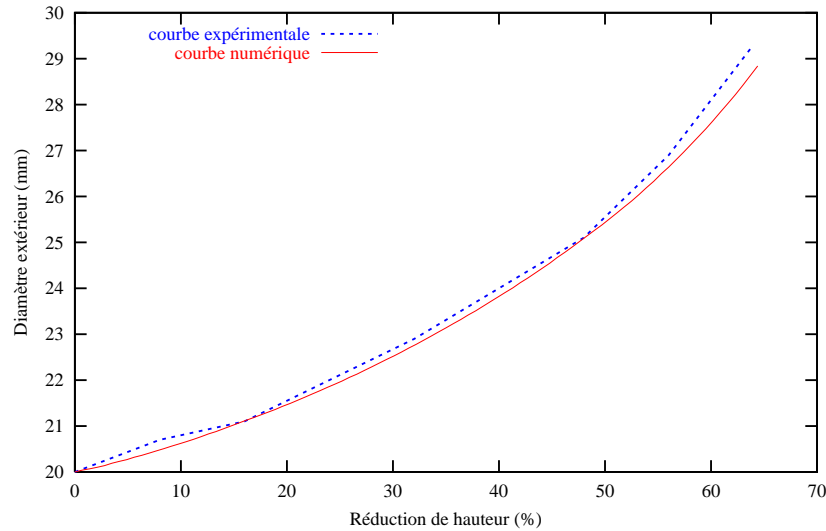


FIG. 5.28 – Comparaison entre l'évolution du diamètre extérieur de l'éprouvette calculée et celle expérimentale.

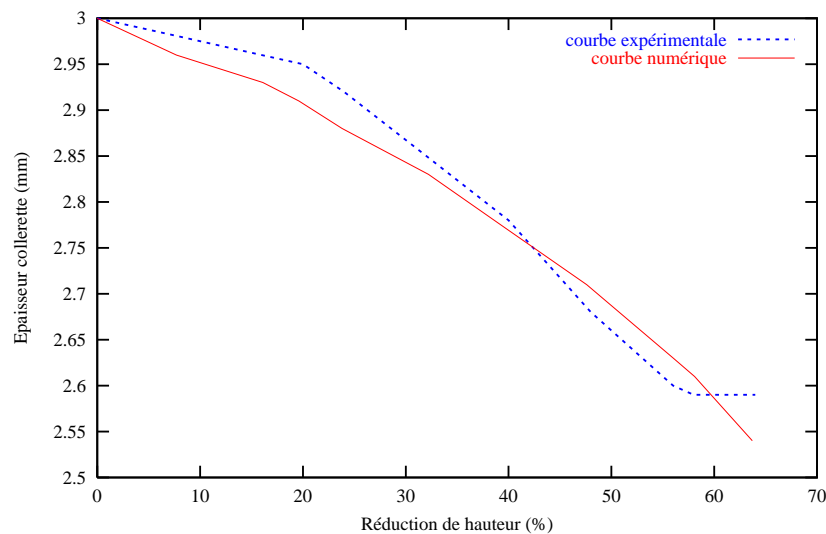


FIG. 5.29 – Comparaison entre l'évolution de l'épaisseur de la collerette calculée et celle expérimentale.

Les résultats numériques sont dans l'ensemble en bon accord avec les résultats expérimentaux. On peut toutefois noter que l'effort de compression est surestimé tout au long du chargement, et plus particulièrement en fin de calcul.

L'exemple du collar test a permis d'évaluer la robustesse des algorithmes de remaillage et d'intégration temporelle explicite, avec prise en compte des conditions de contact et de

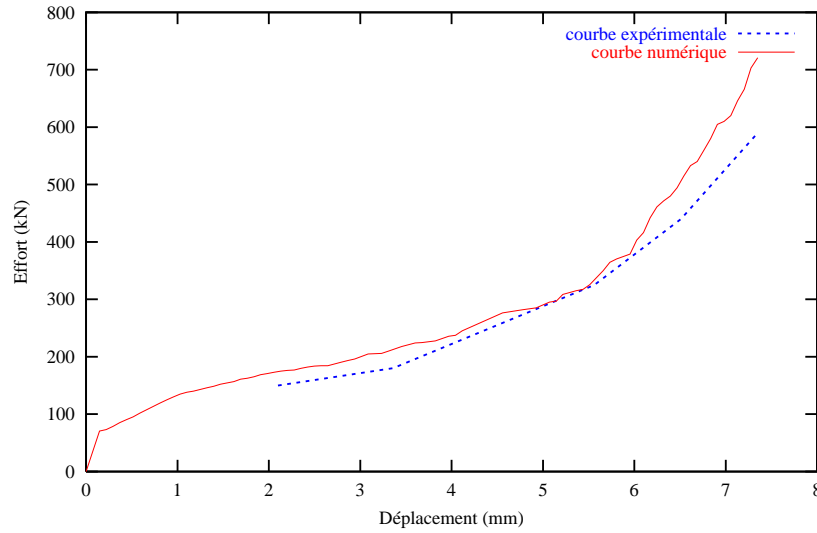


FIG. 5.30 – Comparaison entre les courbes de chargement calculée et expérimentale.

frottement. Nous proposons maintenant d'étudier le problème de forgeage à chaud d'une roue axisymétrique.

5.6 Essai de forgeage à chaud

5.6.1 Description du test

Nous considérons maintenant le forgeage à chaud d'une roue, Staub (1998). L'objectif de ce calcul est de tester la robustesse du calcul élasto-viscoplastique avec effets thermiques par confrontation des résultats numériques avec les données expérimentales fournies par Staub. Par ailleurs, comme pour le cas du collar test, ce calcul illustrera la robustesse de l'algorithme de remaillage et de l'algorithme dynamique explicite.

Ce problème de forgeage est axisymétrique. La géométrie des outils, ainsi que le maillage initial du lopin, sont présentés Fig. 5.31. La géométrie détaillée des outils est fournie par Staub. Seules quelques dimensions caractéristiques sont indiquées sur la Fig. 5.31.

Le lopin cylindrique a pour dimensions 41 mm de hauteur et 15 mm de rayon. Le maillage initial du lopin est composé de 745 nœuds et 344 éléments triangulaires à 6 nœuds. La taille de maille moyenne est de 1.6 mm .

Le comportement du matériau est supposé élasto-viscoplastique écrouissable. Ses propriétés mécaniques et thermiques sont fournies Tab. 5.7. La loi d'écrouissage est la suivante (Staub, 1998) :

$$\sigma_0 = 3946(\bar{\varepsilon}^{vp})^{0.01}(\dot{\varepsilon}^{vp})^{0.11} \exp(-0.0035T) \text{ (en MPa)}$$

Le forgeage est effectué pour un lopin à une température initiale de 1273 K .

Pour le frottement, le coefficient de Coulomb est pris égal à 0.2 .

Le remaillage du lopin est effectué à intervalles réguliers, tous les 5% de réduction de hauteur du lopin. La taille de maille globale imposée lors du remaillage est la même que pour le maillage initial, soit 1.6 mm .

L'algorithme dynamique explicite est utilisé. Puisque le matériau est sensible à la vitesse de déformation, il est important de réaliser la simulation à une vitesse proche de

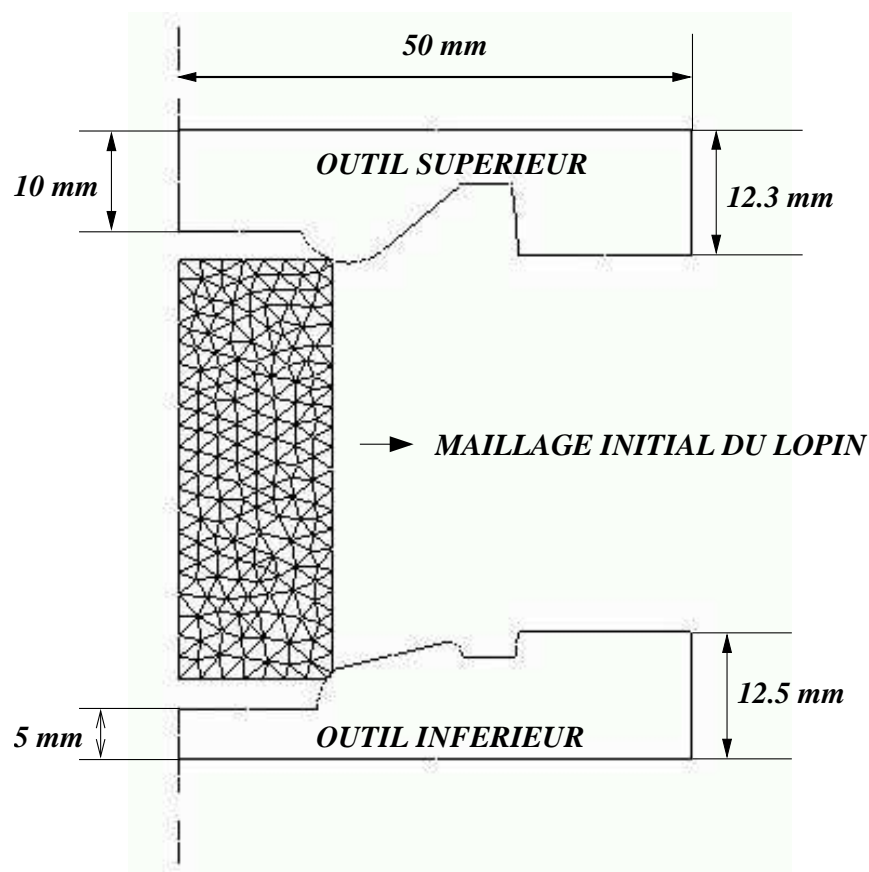


FIG. 5.31 – Géométrie et maillage initial pour l'essai de forgeage.

Grandeur	Valeur
E	20 000 MPa
ν	0.3
ρ	7850 kg.m^{-3}
ξ	0.9
C_v	$0.56 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$

TAB. 5.7 – Caractéristiques mécaniques et thermiques du matériau pour le forgeage à chaud.

la vitesse réelle. D'après les informations fournies par Staub, nous choisissons de travailler à vitesse imposée sur l'outil supérieur. La loi en vitesse est prise sous la forme : $v = -1.2 \cdot 10^{-3}t + 0.5$ (en $m.s^{-1}$), où t est le temps.

Pour diminuer le temps de calcul, Staub indique qu'il est possible d'augmenter la masse volumique, les efforts inertiels pouvant être négligés pour ce problème. Ceci entraîne une augmentation du pas de temps. Staub multiplie la masse volumique par 100, et montre que les termes inertiels ne perturbent pas notablement les résultats. Nous nous limiterons à une multiplication de la masse volumique par 10.

5.6.2 Résultats

La courbe d'effort-déplacement numérique est comparée avec la courbe expérimentale fournie par Staub, sur la Fig. 5.32. Par souci de lisibilité, la courbe numérique présentée sur ce graphe correspond à un lissage de la courbe réelle. La méthode d'intégration temporelle explicite entraîne en effet de légères oscillations de la courbe d'effort. En outre, l'algorithme de remaillage conduit à des variations ponctuelles de l'effort calculé, dues principalement aux approximations faites lors du transport des champs d'un maillage à l'autre.

On constate une bonne correspondance entre les deux courbes tout au long du calcul. L'écart devient plus significatif à la fin du calcul, ce qui s'explique par le fait que dans les tous derniers instants de déformation les conditions de contact sont moins précisément respectées.

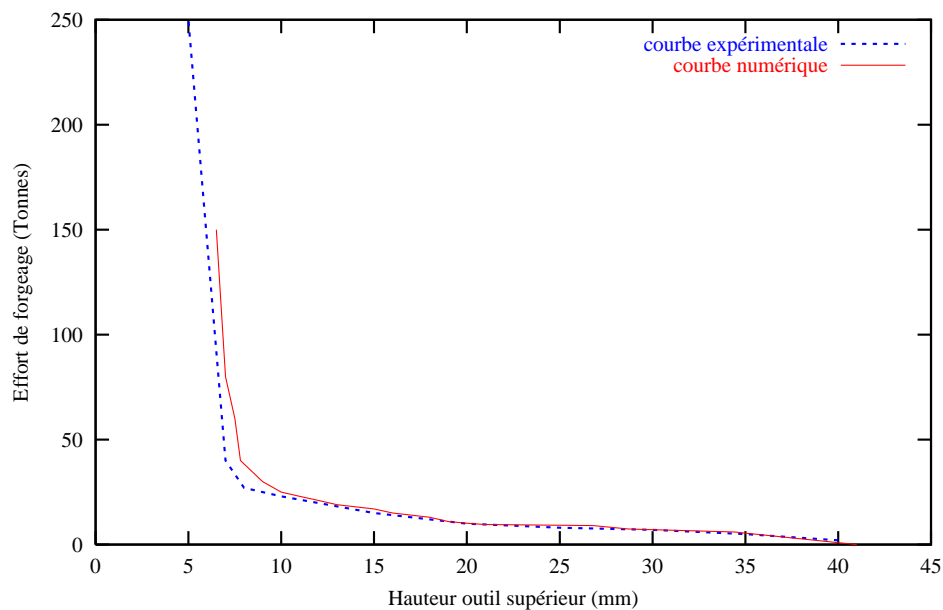


FIG. 5.32 – Comparaison des courbes d'effort expérimentale (fournie par Staub (1998)) et calculée.

Les résultats présentés par Staub concernent les déformées obtenues à deux instants du forgeage. Ce sont ces résultats qui serviront de référence pour la comparaison. La première déformée correspond à une hauteur de lopin de 18.3 mm, cf. Fig. 5.33. Les dimensions fournies pour la roue réelle sont notées D_1 , D_2 , D_3 et L .

La comparaison avec les résultats présentés par Staub est consignée dans le Tab. 5.8. Dans ce tableau, les dimensions obtenues expérimentalement sont présentées, ainsi que

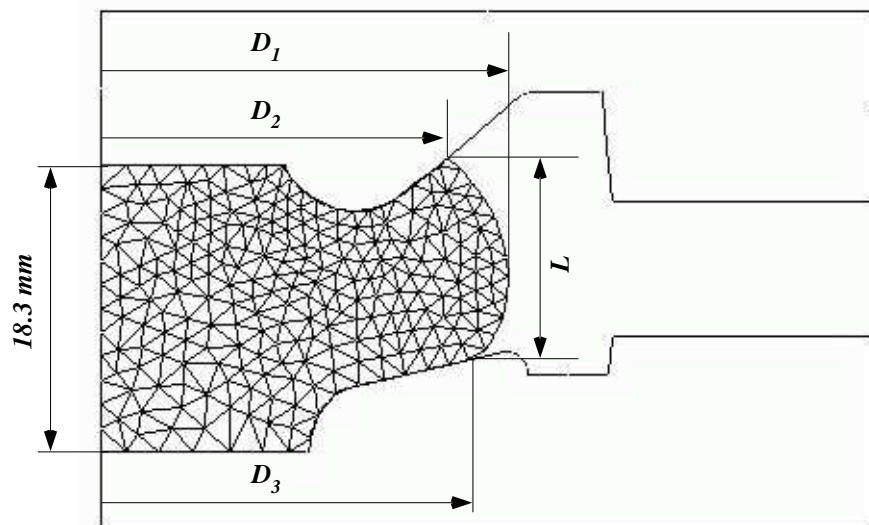


FIG. 5.33 – Déformée du lopin correspondant à une hauteur de 18.3 mm (réduction de hauteur de 55 %).

les dimensions calculées avec le code Pollux en dynamique explicite et avec notre code de calcul BLANKFORM. La dernière ligne présente l'erreur relative entre nos résultats et les valeurs expérimentales. On note globalement une très bonne correspondance avec l'expérience. On peut donc en déduire que le comportement du matériau est correctement reproduit. On note un écart relatif supérieur à 5 % pour deux dimensions caractéristiques. Ceci peut être expliqué par la modélisation du frottement. La valeur du coefficient de Coulomb choisie ici ne correspond pas à une valeur identifiée expérimentalement.

	D_1 (mm)	D_2 (mm)	D_3 (mm)	L (mm)
Expérimental	55.14	45.8	51.5	12
Pollux	53.26	45.22	47.18	13.02
Blankform	53.58	45.56	48.1	12.9
Ecart Blankform/Exp.(%)	2.8	0.5	6.6	7.5

TAB. 5.8 – Comparaison entre les dimensions caractéristiques du lopin obtenues expérimentalement et par le calcul, pour une hauteur de 18.3 mm.

La seconde déformée correspond à une hauteur de lopin de 12 mm, cf. Fig. 5.34. Les dimensions fournies pour la roue réelle sont notées D_1 , D_2 , D_3 et L .

Les résultats sont consignés dans le Tab. 5.9. Les résultats sont globalement cohérents avec ceux obtenus avec le programme Pollux. On observe cependant deux écarts significatifs, supérieurs à 10 %, avec les données expérimentales. Nous pensons que cela peut s'expliquer par le traitement du contact avec frottement entre les outils et le lopin. Comme pour le résultat précédent, la modélisation du frottement est uniquement qualitative. Par ailleurs, il serait probablement intéressant de diminuer la taille du maillage dans la zone où le contact n'est visiblement pas correctement reproduit (partie supérieure droite du lopin), afin d'améliorer les résultats. Malgré tout, le forgeage à chaud de la roue est globalement simulé de façon réaliste.

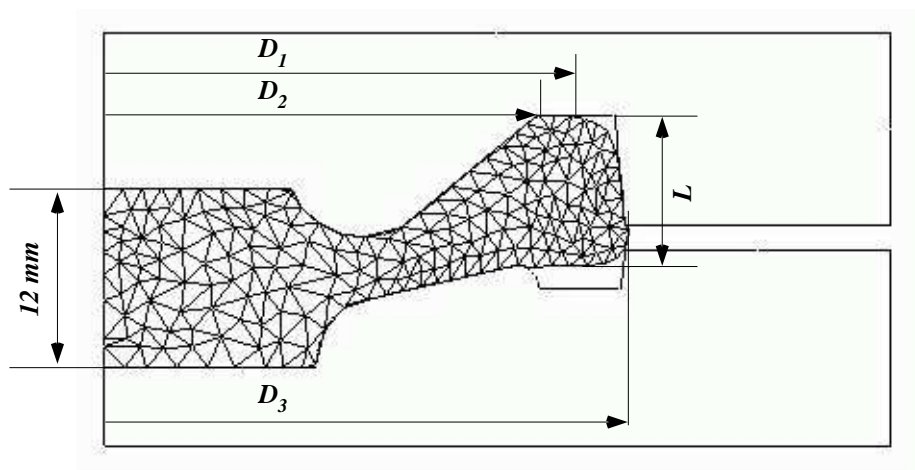


FIG. 5.34 – Déformée du lopin correspondant à une hauteur de 12 mm (réduction de hauteur de 70 %).

	D_1 (mm)	D_2 (mm)	D_3 (mm)	L (mm)
Expérimental	62.9	58.2	67	11.6
Pollux	56.58	60.72	66.22	10.4
Blankform	56.20	59.4	66.76	10.1
Ecart Blankform/Exp.(%)	10.6	2.0	0.4	12.9

TAB. 5.9 – Comparaison des dimensions caractéristiques du lopin expérimentales et calculées, pour une hauteur de 12 mm.

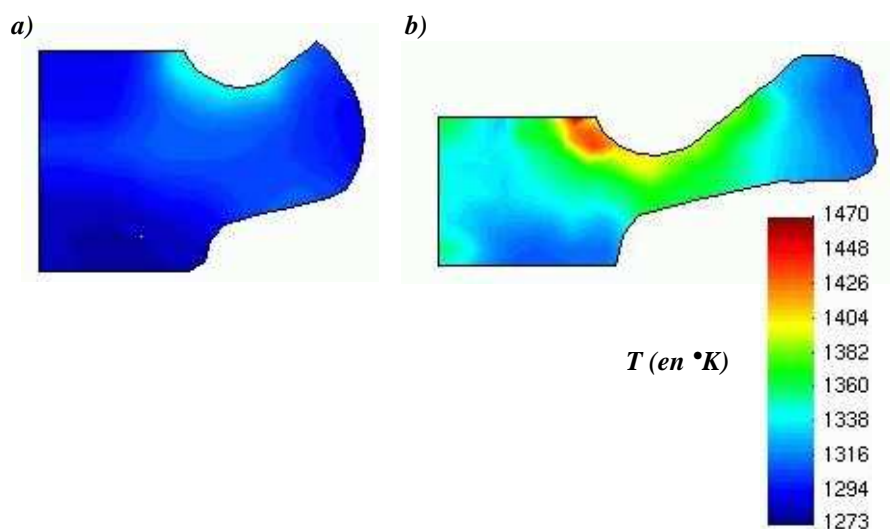


FIG. 5.35 – Distribution de la température pour une hauteur du lopin de a) 18.3 mm ; b) 12 mm.

Grandeur	Valeur
Rayon poinçon R_p	4 mm
Rayon matrice R_m	4.125 mm
Rayon arête poinçon r_p	0.225 mm
Rayon arête matrice r_m	0.150 mm
Epaisseur tôle e	2.5 mm
Jeu poinçon-serre flan J_{dp}	0.20 mm
Longueur L	12 mm

TAB. 5.10 – Caractéristiques géométriques du problème de découpage axisymétrique.

Pour terminer, la distribution de la température dans le lopin, pour les deux niveaux de pénétration discutés précédemment, est présentée sur la Fig. 5.35. On observe un échauffement du lopin au niveau de la zone de contact avec l'outil supérieur. L'accroissement maximal de température calculé pour une hauteur de lopin de 12 mm est de 195 K. En l'absence d'éléments de comparaison avec les résultats fournis par Staub, nous ne pouvons conclure quant à la qualité de cette estimation.

Cet essai de forgeage a mis en évidence la fiabilité et la robustesse des différents algorithmes développés.

Le dernier problème que nous proposons dans ce chapitre concerne le calcul d'un découpage axisymétrique.

5.7 Découpage axisymétrique

5.7.1 Description du test

Le dernier calcul proposé concerne le découpage axisymétrique d'une tôle d'épaisseur 2.5 mm. Ce problème a été traité par Maillard (1991) et repris par la suite par quelques auteurs (Hambli, 1996; Homsy *et al.*, 1996; Bezzina, 1996; Cherouat et Saanouni, 2003).

Les méthodes envisagées pour le traitement de l'endommagement et de la rupture ductile seront confrontées aux données expérimentales fournies par Maillard (1991).

La géométrie et le maillage initial de la tôle sont présentés sur la Fig. 5.36. Les données géométriques complètes sont fournies dans le Tab. 5.10.

Le jeu poinçon-matrice par face est égal à 5 % de l'épaisseur. Les rayons des arêtes poinçon et matrice correspondent à des outils usés, Maillard (1991). En revanche, les données concernant le jeu poinçon-serre flan J_{dp} et la longueur L de la tôle ne sont pas fournies. Les valeurs sont choisies à partir des résultats présentés par Maillard.

Les expériences ont été réalisées en quasi-statique (vitesse de 5 $mm.min^{-1}$) et sans lubrification. Cependant, Maillard indique que les résultats numériques les plus réalistes correspondent à une hypothèse de glissement parfait entre la tôle et les outils. C'est donc l'hypothèse que nous prendrons pour le traitement du contact dans nos calculs.

Le maillage initial de la tôle est composé de 1342 éléments triangulaires à 6 nœuds et 2765 nœuds. La taille de maille dans la zone affinée du maillage est prise égale à 0.075 mm, soit la moitié du plus petit rayon d'outil. Le remaillage de la tôle est effectué périodiquement, tous les 3 % de déplacement du poinçon. La taille de maille est imposée

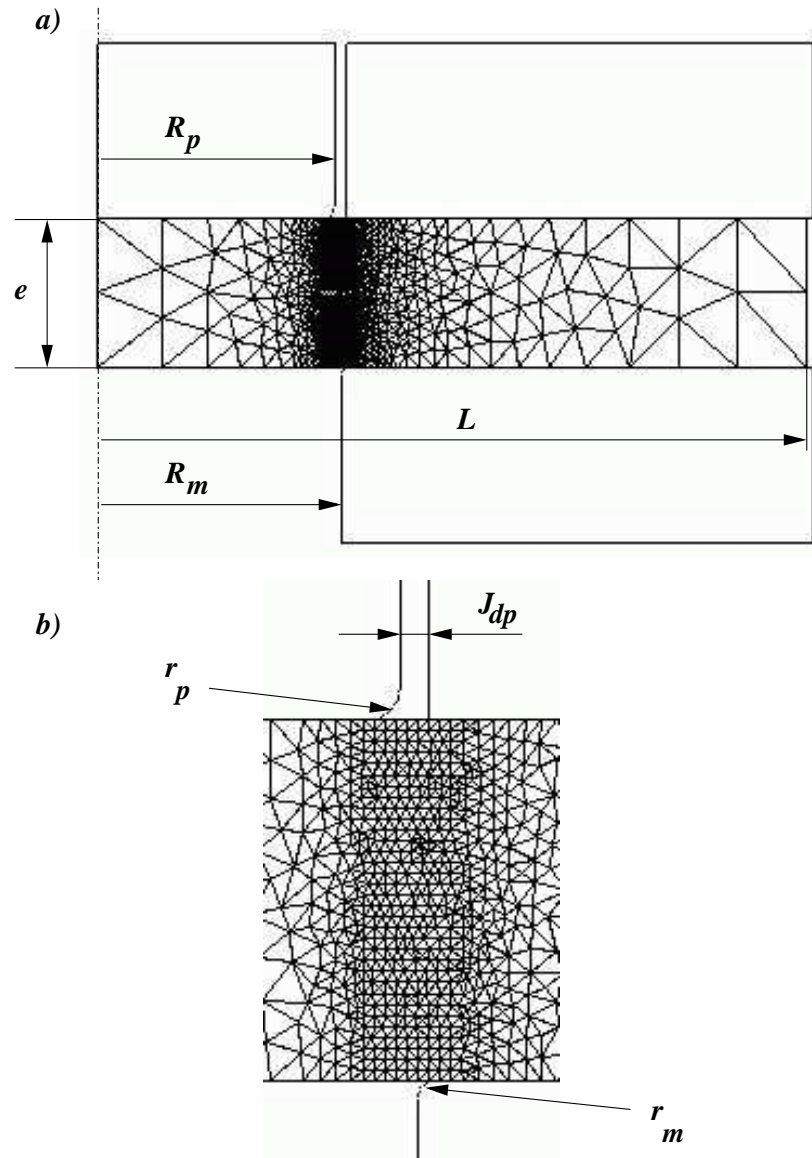


FIG. 5.36 – a) Géométrie des outils et maillage initial; b) Agrandissement de la zone centrale.

Grandeur	Valeur
E	210000 MPa
ν	0.29
σ_y	150 MPa
k	448 MPa
n	0.406

TAB. 5.11 – Caractéristiques mécaniques de l'acier XES.

lors du remaillage selon la méthode décrite au chapitre 4, c'est-à-dire en décomposant la tôle en trois zones. Dans la zone centrale, la taille de maille de 0.075 mm est conservée tout au long du calcul.

Le matériau découpé est un acier de qualité XES dont les caractéristiques mécaniques sont résumées dans le Tab. 5.11. Le comportement considéré est élasto-plastique et la loi d'écrouissage est prise sous la forme suivante :

$$\sigma_0 = \sigma_y + k(\bar{\varepsilon}^p)^n \quad (5.28)$$

5.7.2 Résultats

Evaluation des algorithmes de discrétisation temporelle

Les algorithmes dynamique explicite et quasi-statique implicite ont été testés sur cet exemple. Le calcul avec l'algorithme quasi-statique implicite est effectué par incrément de déplacement du poinçon de $2.5 \cdot 10^{-3}$ mm. Pour l'algorithme dynamique explicite, une vitesse numérique de 5 mm.ms^{-1} est choisie. Cette vitesse permet pour ce calcul de retrouver la solution obtenue en quasi-statique.

La première observation concerne le temps de calcul nécessaire. Il s'avère que la résolution est environ 3 fois plus rapide avec l'algorithme implicite. Les calculs ont été réalisés sur un processeur pentium 4 cadencé à 2.4 GHz. Pour un essai traité avec un comportement élasto-plastique sans couplage avec l'endommagement et sans simuler la phase de rupture, le temps de calcul en implicite est de 30 minutes pour atteindre un déplacement du poinçon égal à l'épaisseur de la tôle. Il est d'1 heure 30 minutes environ avec l'algorithme dynamique explicite. Ceci est dû au fait que la résolution explicite nécessite un pas de temps très faible, directement proportionnel à la taille du plus petit élément du maillage. La finesse du maillage dans la zone entre les arêtes poinçon et matrice entraîne une diminution du pas de temps (de l'ordre de 10^{-6} dans notre cas). D'autre part, nous avons indiqué dans le chapitre 4 qu'aucune procédure d'augmentation du pas de temps n'est utilisée. Compte tenu des résultats, ce type de technique apparaît nécessaire.

Cependant, l'utilisation de l'algorithme quasi-statique n'est pas sans inconvénient. En effet, la technique de traitement du contact telle qu'elle a été présentée au chapitre 4 nécessite d'utiliser des incréments de déplacement faibles ($2.5 \cdot 10^{-3}$ mm dans notre cas). Dans le cas contraire, on observe une divergence du calcul due essentiellement au décollement des nœuds, ce qui a tendance à déséquilibrer la structure. Si l'incrément de déplacement est trop faible, il peut survenir un problème d'oscillations pour le déplacement de certains nœuds. Lorsqu'un nœud en contact avec un outil passe d'un segment d'outil

à un autre, il peut dans certains cas osciller entre son ancienne et sa nouvelle position. L'équilibre global de la structure n'est alors pas atteint. Une solution pour résoudre ce problème pourrait être d'effectuer un lissage des normales entre les segments représentant la surface des outils. Cette technique n'a pas été étudiée ici.

Le temps de calcul a été privilégié pour ce calcul, et nous avons donc fait le choix d'utiliser l'algorithme quasi-statique implicite. Les calculs présentés par la suite ont été obtenus avec une convergence sur le résidu des efforts nodaux de 10^{-3} (voir chapitre 4) à chaque incrément, sans problème d'oscillation. L'algorithme dynamique explicite développé s'avère toutefois plus robuste. Il doit donc être utilisé pour des problèmes dont la convergence est difficile à obtenir avec un algorithme implicite. Nous en verrons un exemple au chapitre 6.

Apport du remaillage

Le premier calcul présenté concerne la simulation du découpage sans prendre en compte la phase de rupture de la tôle. Le comportement du matériau n'incorpore pas les effets de l'endommagement. L'objectif est de montrer que l'utilisation d'un algorithme de remaillage permet de mieux simuler le contact entre la tôle et les outils.

Deux déformées obtenues avec et sans remaillage sont présentées sur la Fig. 5.37.

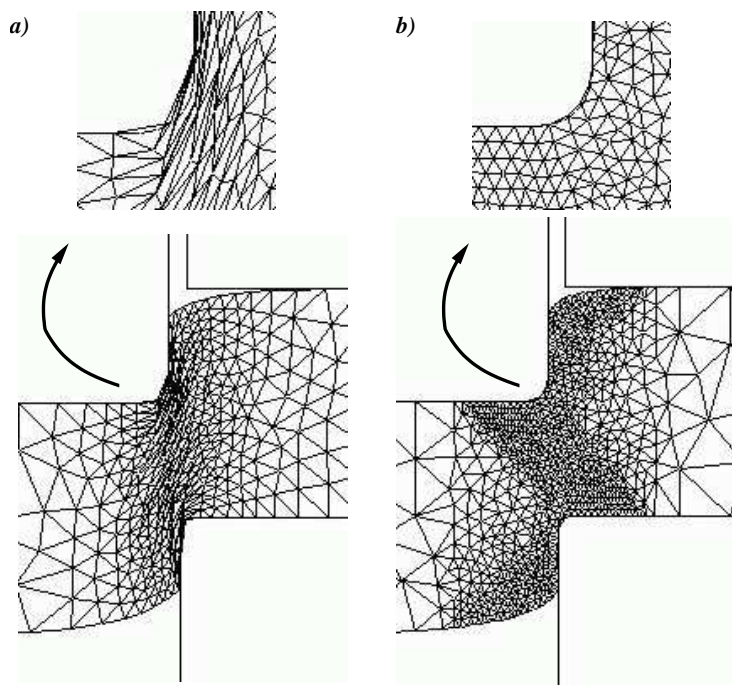


FIG. 5.37 – Déformées obtenues (et agrandissements au niveau de l'arête poinçon) pour une pénétration du poinçon de 1.25 mm (50 % de l'épaisseur de la tôle). a) Sans remaillage ; b) Avec remaillage.

On observe clairement que le contact n'est pas correctement traité sans remaillage, du fait de l'importante distortion du maillage.

La confrontation des courbes d'effort calculées et expérimentale est présentée sur la Fig. 5.38.

L'apport du remaillage est très clair sur ce graphe. Sans remaillage, l'effort poinçon est largement surestimé et augmente constamment. Ceci est dû au mauvais traitement des

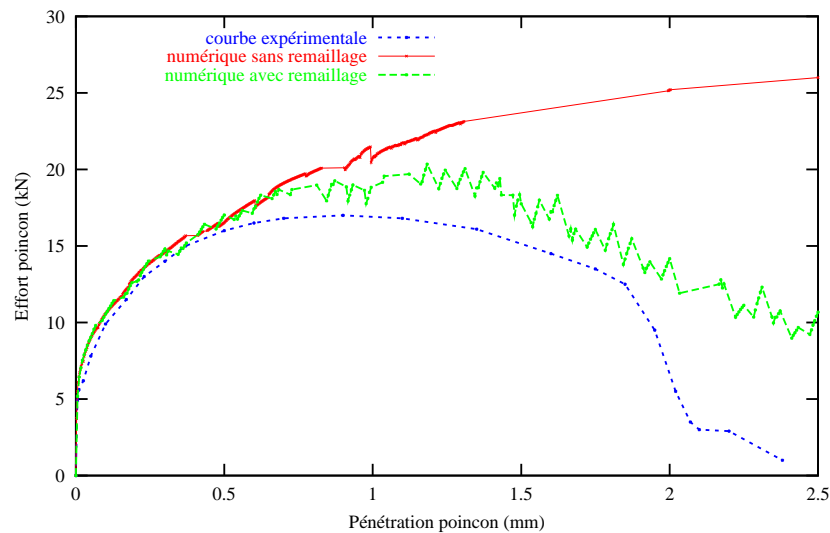


FIG. 5.38 – Comparaison des courbes d'effort calculées et expérimentale pour le découpage axisymétrique.

conditions de contact. En revanche, en remaillant, l'allure générale de la courbe d'effort est obtenue. La diminution de l'effort poinçon est due à la diminution de la section sollicitée en cisaillement entre les arêtes poinçon et matrice. L'intensité de l'effort reste surestimée par rapport à l'expérience, cela résulte de la non prise en compte des phénomènes d'endommagement et de rupture dans ce calcul. Par ailleurs, les oscillations observées sur la courbe d'effort sont dues aux différentes étapes de remaillage. Les approximations faites lors du transport des champs sont répercutées sur l'effort poinçon. Lors de l'incrément de rééquilibrage de la structure, quelques nœuds peuvent décoller de l'outil. Ils sont de nouveau considérés en contact pour l'incrément de déplacement suivant, ce qui entraîne une oscillation sur la courbe d'effort.

Traitement complet du découpage axisymétrique

Pour simuler la rupture complète de la tôle, nous envisageons deux approches pour ce calcul. Dans un premier temps, un calcul couplant déformation et endommagement est proposé. Puis, la simulation est réalisée en utilisant un critère de rupture.

- Modèle d'endommagement couplé.

Le modèle d'endommagement utilisé est le modèle de type Gurson. Ne disposant pas de paramètres identifiés pour le matériau découpé, nous prendrons les valeurs que l'on trouve fréquemment dans la littérature. Celles-ci sont regroupées dans le Tab. 5.12.

La méthode de traitement de la phase de rupture retenue pour ce modèle est la méthode d'élimination des éléments. Un élément est déclaré rompu et supprimé du maillage dès que la valeur moyenne de la fraction volumique f calculée aux points de Gauss dépasse la valeur critique à rupture f_F .

Homs *et al.* (1996) ont également utilisé un modèle de type Gurson pour simuler le même problème de découpage. La méthode de rupture mise en œuvre est une méthode d'annulation de la raideur. Toutefois, les coefficients du modèle de type Gurson ne sont pas les mêmes. La valeur de la fraction à rupture est plus élevée dans leur cas ($f_F = 0.8$). Avec ces coefficients, aucun élément n'est rompu au cours de la simulation.

Grandeur	Valeur
q_1	1.5
q_2	1
q_3	2.25
ε_n	0.2
s_n	0.1
f_n	0.04
f_{cr}	0.15
f_F	0.25

TAB. 5.12 – Coefficients du modèle de type Gurson pour le découpage axisymétrique.

Maillard indique qu'une fissure s'amorce au niveau de l'arête matrice pour une pénétration du poinçon d'environ 1.9 mm (76 % de l'épaisseur de la tôle). Sur la courbe effort-déplacement, cet instant correspond à une brusque diminution de la pente.

Nous avons d'abord effectué une simulation sans prendre en compte la phase de coalescence et en ne traitant pas la phase de rupture de la tôle. Le calcul est donc mené jusqu'à 100 % de pénétration du poinçon. La courbe effort-déplacement obtenue est comparée à la courbe expérimentale, Fig. 5.39.

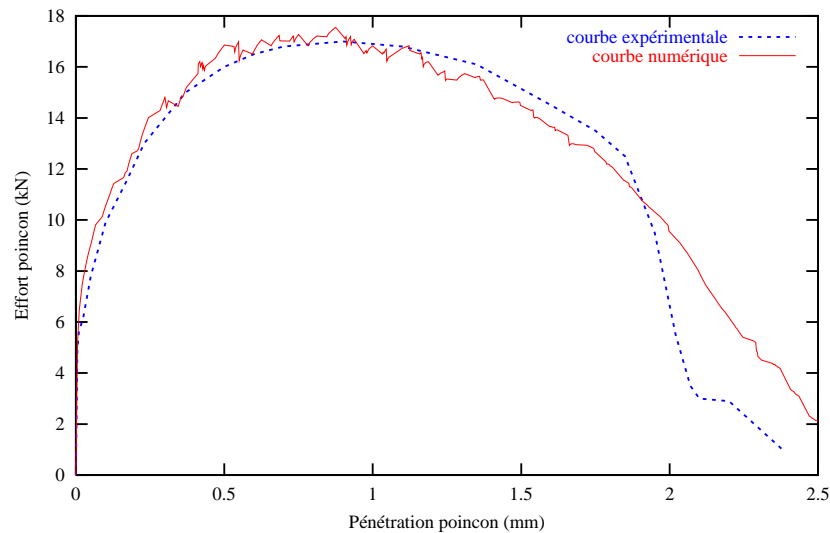


FIG. 5.39 – Comparaison des courbes d'effort calculée et expérimentale pour le modèle de type Gurson sans prise en compte de la phase de rupture.

On observe que la prise en compte de l'endommagement permet de mieux prédire l'effort de découpage. Ces résultats sont en accord avec ceux présentés par Homs *et al.* (1996). L'écart relatif constaté entre les deux courbes avant la phase de rupture résulte de la non identification des paramètres matériels du modèle d'endommagement.

Les distributions de la fraction volumique de cavités et de la déformation plastique équivalente pour une pénétration du poinçon égale à 76 % de l'épaisseur sont présentées sur la Fig. 5.40.

La valeur maximale de la fraction volumique se situe près de l'arête matrice. Homs obtient une valeur maximale pour la fraction volumique de 0.035 et pour la déformation plastique équivalente de 2.64 pour une pénétration de 80 % de l'épaisseur.

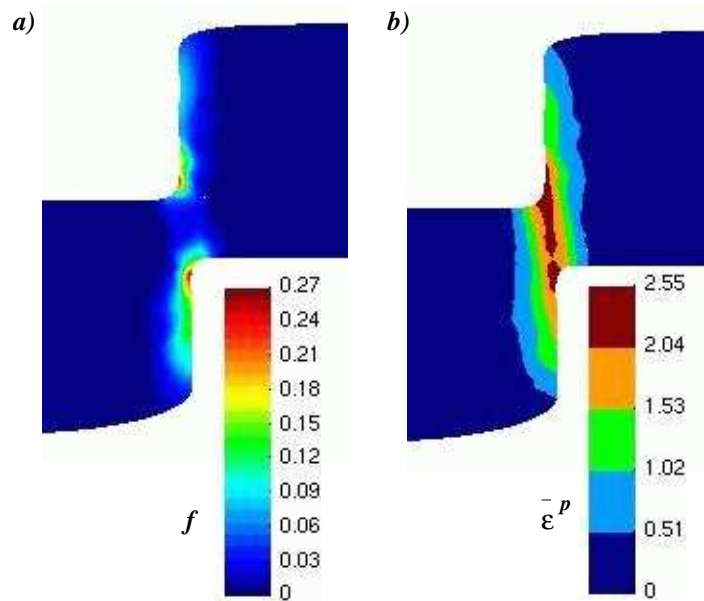


FIG. 5.40 – Distribution de la fraction volumique de cavités (a) et de la déformation plastique équivalente (b) pour une pénétration du poinçon de 76 % de l'épaisseur.

Notons cependant qu'Hambli (1996), a effectué des simulations avec le modèle de Gurson et n'obtient pas ce type de répartition de l'endommagement. Celui-ci est localisé sous le poinçon et sous la matrice, cf. Fig. 2.14 du chapitre 2.

Les figures Fig. 5.41 et Fig. 5.42 présentent la distribution de la contrainte hydrostatique et de la contrainte de cisaillement pour deux niveaux de pénétration du poinçon. On observe en particulier qu'il existe une zone de traction située entre les arêtes poinçon et matrice. Celle-ci, associée à la déformation plastique, est à l'origine du développement de l'endommagement dans cette zone. Sous les arêtes poinçon et matrice, la tôle se trouve en compression. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 3, nous empêchons l'évolution de l'endommagement en compression, ce qui n'est pas le cas du modèle général de Gurson. Ceci peut être une des raisons pour lesquelles, avec un modèle de type Gurson non modifié, on obtient une distribution de l'endommagement différente.

La phase de rupture est maintenant prise en compte en introduisant la phase de coalescence dans le modèle d'endommagement. Le profil de rupture obtenu avec la méthode d'élimination des éléments est présenté sur la Fig. 5.43. La courbe effort-déplacement correspondante est tracée sur la Fig. 5.44.

On constate sur ces deux figures que la phase de rupture n'est pas correctement simulée. En effet, des éléments situés près de la paroi verticale de la matrice sont éliminés, ce qui n'est pas conforme à l'expérience. La courbe d'effort obtenue ne parvient pas à reproduire correctement la chute d'effort constatée. Par ailleurs, la diminution de l'effort s'amorce avant la phase de rupture, ce qui conduit à une sous estimation de l'effort de découpage. Ceci est dû au fait que les paramètres matériels choisis pour modéliser la phase de coalescence ne sont pas adaptés. On note en effet que la rupture sur certains éléments, accélérée par la phase de coalescence, intervient trop tôt, d'où la diminution prononcée de l'effort.

Cet exemple met en évidence le principal inconvénient des modèles couplés, et en particulier celui du modèle de type Gurson, à savoir l'identification des nombreux paramètres matériels. Sans cette étape, il est difficile d'obtenir une simulation correcte du découpage

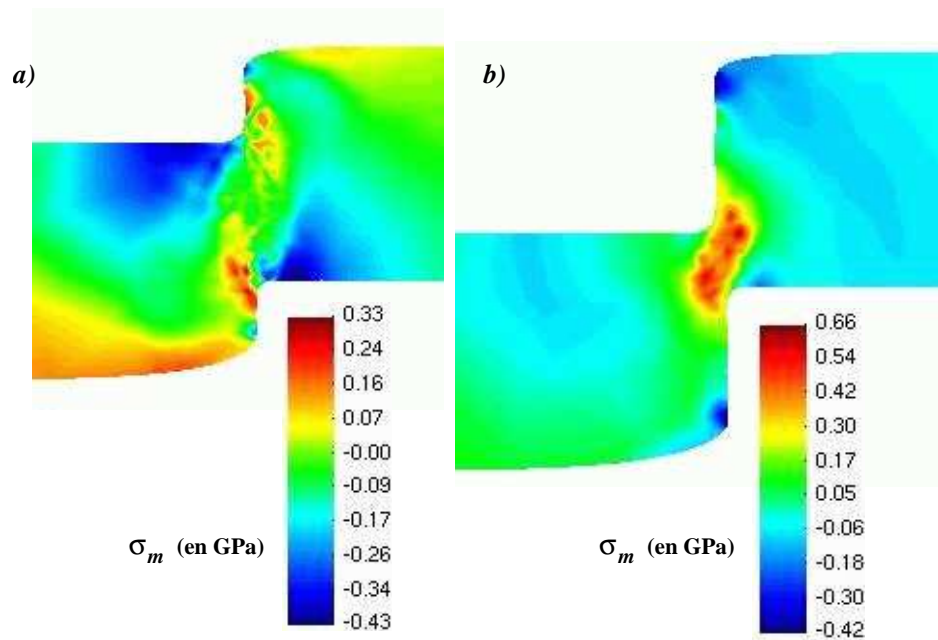


FIG. 5.41 – Distributions de la contrainte hydrostatique pour une pénétration du poinçon de a) 40 % de l'épaisseur ; b) 76 % de l'épaisseur.

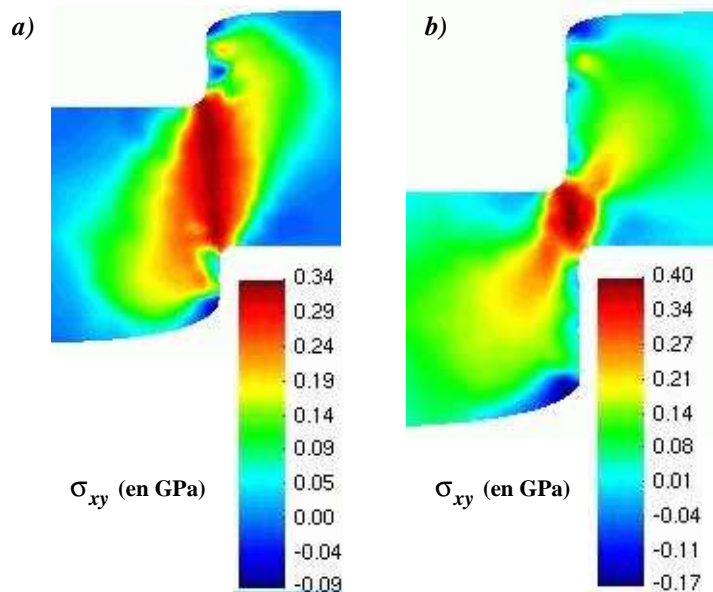


FIG. 5.42 – Distributions de la contrainte de cisaillement pour un déplacement du poinçon de a) 40 % de l'épaisseur ; b) 76 % de l'épaisseur.

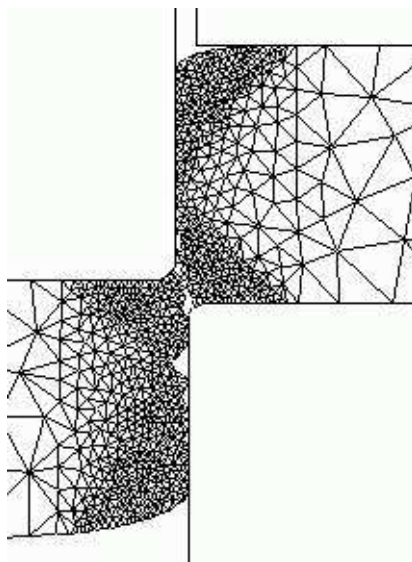


FIG. 5.43 – Profil obtenu avec le modèle de Gurson et la méthode d'élimination des éléments (pénétration du poinçon égale à 90 % de l'épaisseur).

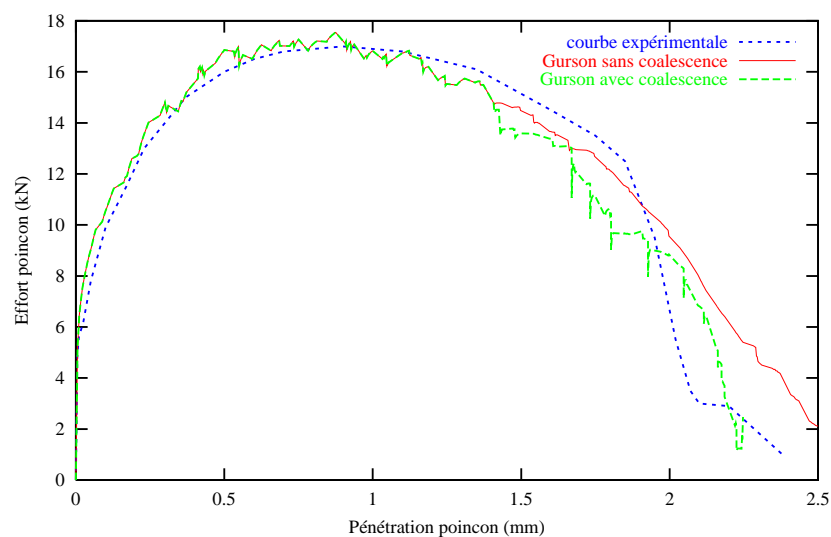


FIG. 5.44 – Comparaison des courbes d'effort calculée et expérimentale pour le modèle de type Gurson avec prise en compte de la phase de rupture par la coalescence.

jusqu'à la rupture complète. Les résultats présentés par Cherouat et Saanouni (2003) confirment cette remarque. Les auteurs utilisent un modèle d'endommagement couplé basé sur une formulation thermodynamique des processus irréversibles. Ils observent un écart important entre la chute d'effort mesurée expérimentalement et celle obtenue par la simulation numérique. Ils indiquent que cet écart est dû à la mauvaise identification des paramètres matériels d'endommagement.

Bien que moins précis car ne prenant pas en compte l'endommagement dans le comportement matériel, les modèles découplés peuvent représenter une alternative intéressante. Nous allons traiter le problème du découpage axisymétrique avec ce type de modèle, afin d'évaluer leur validité.

- Modèle non couplé.

Nous envisageons la simulation du problème de découpage par une approche découplée dans laquelle l'amorçage d'une fissure est détecté par un critère de rupture. Le critère de rupture de Freudenthal est choisi. On rappelle que celui-ci a pour expression :

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} \sigma_{eq} d\bar{\varepsilon}^p \leq D_C \quad (5.29)$$

Là encore, nous ne disposons pas de valeur identifiée pour la valeur critique à rupture D_C de ce critère. Celle-ci est déterminée numériquement de sorte que l'amorçage d'une fissure corresponde au niveau de pénétration obtenu expérimentalement par Maillard, soit 76 % de l'épaisseur. On obtient alors $D_C = 1.36$.

Les trois méthodes d'analyse de la rupture présentées au chapitre 4 sont évaluées sur cet exemple.

La première méthode consiste à stopper le calcul dès que l'amorçage d'une fissure est détecté. Goijaerts (1999) a utilisé ce type d'approche pour réaliser l'identification de critères de rupture. La pénétration à rupture est considérée comme égale à la somme des dimensions de la zone bombée, de la zone cisailée et de la bavure, Fig. 5.45. Pour déterminer la taille de la bavure, Goijaerts propose d'identifier le sommet de celle-ci au point pour lequel l'endommagement est maximal. C'est la méthode que nous retiendrons.

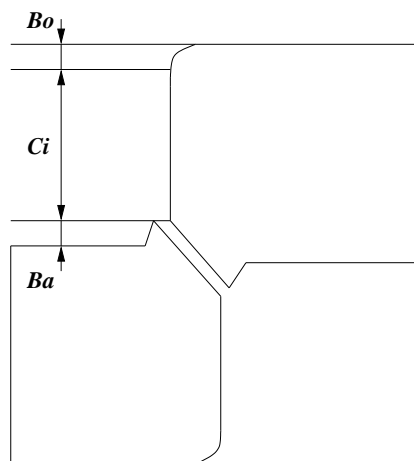


FIG. 5.45 – Détermination de la pénétration à rupture, d'après Goijaerts (1999).

La distribution de la variable d'endommagement définie par le critère de Freudenthal est donnée sur la figure Fig. 5.46.

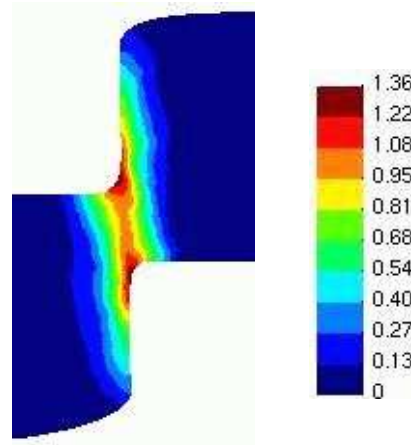


FIG. 5.46 – Distribution de la variable d'endommagement pour le critère de Freudenthal, et pour une pénétration du poinçon égale à 76 % de l'épaisseur.

La valeur maximale se situe au niveau de l'arête matrice. Pour appliquer la méthode proposée par Goijaerts, nous recherchons le point situé près de l'arête poinçon où l'endommagement est maximal. Nous obtenons les valeurs suivantes pour le profil de rupture :

- Bombée : 10.8 % de l'épaisseur
- Cisailée : 60.4 % de l'épaisseur
- Arrachée : 28.8 % de l'épaisseur
- Bavure : 4.8 % de l'épaisseur

Des informations précises concernant le profil de rupture expérimental ne sont pas fournies par Maillard (1991). A partir des images fournies dans cette thèse, on peut déterminer une approximation de la zone bombée, estimée à 9.6 %. Compte tenu du caractère approximatif de la mesure expérimentale, on peut considérer que cette zone est correctement simulée.

En revanche, on peut supposer que la zone cisailée est sous-estimée dans la mesure où l'amorçage d'une fissure a lieu sur l'arête matrice. Par conséquent, la zone cisailée continue à se développer tandis que la fissure se propage. Cet exemple montre donc les limites de ce type d'approche.

• Nous testons les deux autres méthodes proposées au chapitre 4, à savoir la méthode d'élimination des éléments et la méthode de propagation de fissures. Pour la méthode de propagation de fissures, nous choisissons un accroissement L de fissure égal à 0.015 mm, et une taille de maille en pointe de fissure égale à L .

Les profils obtenus par les deux méthodes sont présentés sur les Fig. 5.47 et Fig. 5.48. Les courbes effort-déplacement correspondantes sont tracées sur la Fig. 5.49.

Pour la méthode d'élimination des éléments, si la fissure s'amorce en premier lieu côté matrice, c'est la propagation d'une fissure amorcée côté poinçon qui conduit à la rupture. D'après les informations fournies par Maillard, cela ne semble pas conforme à l'expérience. Nous pensons que ce résultat vient de la dépendance de cette méthode au maillage éléments finis. La rupture complète a lieu pour une pénétration de 89 %. Si l'on compare la courbe d'effort obtenue à la courbe expérimentale, on constate que la diminution de l'effort calculée est moins prononcée. Ceci laisse supposer que la pénétration à rupture est surestimée, et donc que le profil n'est prédit qu'approximativement.

Pour la méthode de propagation de fissures, nous obtenons l'amorçage de deux fissures qui se propagent l'une vers l'autre. Le manque d'information sur ce point dans Maillard

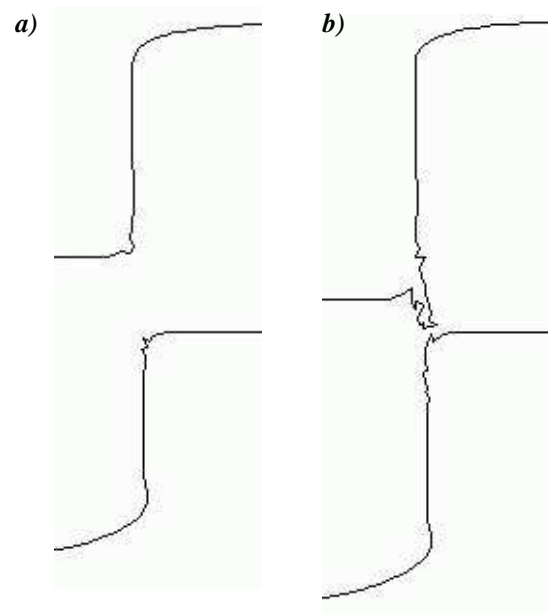


FIG. 5.47 – Profils de rupture obtenus avec un modèle découplé et la méthode d'élimination des éléments ; a) Pénétration de 76 % ; b) Pénétration de 89 %.

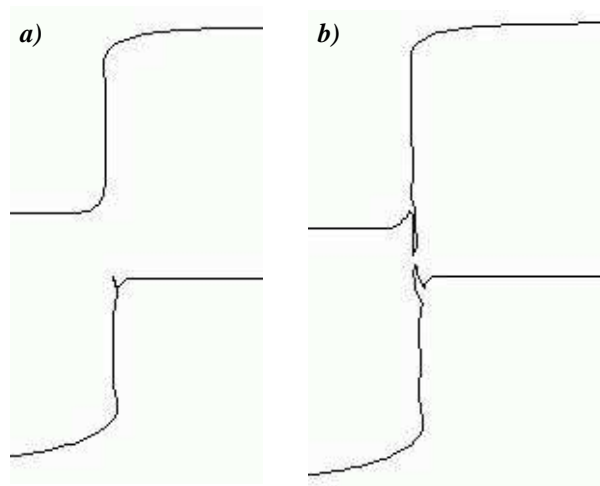


FIG. 5.48 – Amorçage et propagation des fissures calculés avec le critère de Freudhental ; a) Pénétration de 76 % ; b) Pénétration de 82 %.

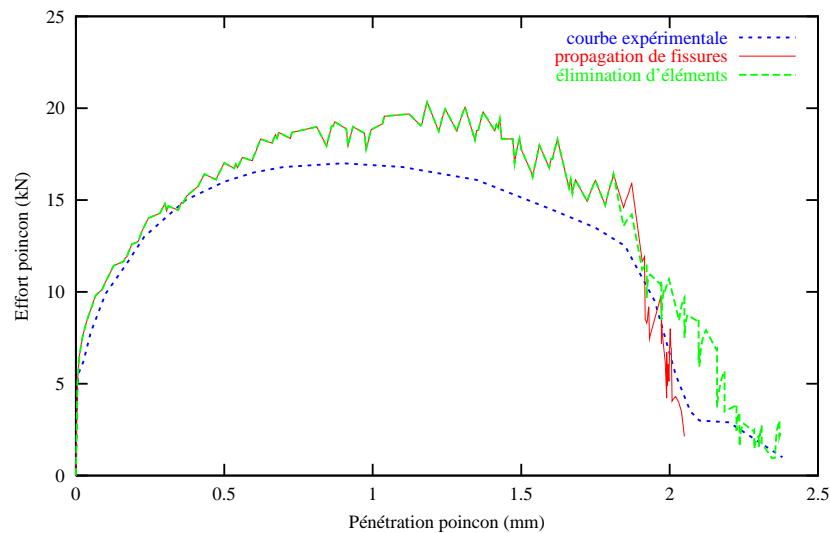


FIG. 5.49 – Comparaison des courbes d'effort expérimentale et calculées avec les méthodes d'élimination des éléments et de propagation de fissures.

(1991) ne nous permet pas de conclure quant à l'exactitude de ce trajet de propagation. En revanche, la courbe effort-déplacement montre que la diminution de l'effort calculée est en accord avec l'expérience. Le profil obtenu est sans doute plus réaliste que dans le cas précédent.

Les valeurs des différentes zones mesurées sont consignées dans le Tab. 5.13.

Méthode	Bombée (%)	Cisaillée (%)	Arrachée (%)	Bavure (%)
Elimination	10.8	60.9	28.3	2.2
Propagation	10.8	64.5	24.7	2.5

TAB. 5.13 – Profils obtenus avec la méthode d'élimination des éléments et avec la méthode de propagation de fissures (dimensions exprimées en pourcentage de l'épaisseur).

5.7.3 Bilan

Le problème d'un découpage axisymétrique d'une tôle d'épaisseur 2.5 mm a été présenté. Celui-ci a permis d'évaluer les techniques de résolution pour ce type de problème. A l'issue de ces calculs, on peut dégager les conclusions suivantes :

- L'algorithme dynamique explicite s'avère plus robuste que l'algorithme quasi-statique implicite. En revanche, il est significativement plus lent.
- L'utilisation d'un algorithme de remaillage est indispensable pour simuler correctement le contact entre la tôle et les outils. La diminution de l'effort observée expérimentalement est en partie due à la diminution de la section cisaillée et celle-ci ne peut être correctement reproduite sans remaillage.
- Le couplage entre déformation et endommagement permet d'obtenir numériquement la courbe la plus proche de la courbe expérimentale, jusqu'à l'amorce de rupture. La prise en compte de l'endommagement entraîne en effet une diminution de l'effort calculé. En revanche, la modélisation précise de la phase de rupture nécessite

l'identification de plusieurs paramètres matériels. Ce point constitue le principal inconvénient de ces modèles.

- L'utilisation d'un modèle découplé conduit à une surestimation de l'effort de découpage. En revanche, associée à la méthode de propagation de fissures développée, cette technique s'avère une alternative intéressante pour prédire le profil de rupture. Le seul paramètre à identifier est alors la valeur critique à rupture du critère choisi.

Conclusion

Les développements numériques présentés au chapitre 4 ont été évalués. La capacité de notre programme BLANKFORM à traiter une large variété de problèmes a été mise en évidence.

Les deux premiers calculs concernent des problèmes élémentaires. La confrontation avec des solutions analytiques ou semi-analytiques a permis de valider l'implémentation des lois de comportement élasto-plastique, élasto-viscoplastique avec effets thermiques et des modèles couplant déformation et endommagement.

La prédiction de l'endommagement ductile par un modèle couplé de type Lemaître a été discutée sur le calcul d'une éprouvette en traction. Ce type d'approche permet de détecter la localisation de l'endommagement dans une bande de cisaillement, contrairement à une approche non couplée.

Les deux techniques d'analyse de la rupture ductile développées ont été appliquées au problème d'une plaque non symétrique en traction. La méthode d'élimination des éléments permet d'obtenir des résultats cohérents mais sa dépendance au maillage éléments finis rend cette méthode peu robuste. La méthode de propagation de fissures s'avère moins sensible au maillage et les résultats sont en bon accord avec ceux disponibles dans la littérature.

Le problème de compression dit collar test a servi de référence pour la validation des algorithmes dynamique explicite et de remaillage. La confrontation avec les résultats expérimentaux disponibles a été réalisée avec succès. En outre, ce calcul a montré la robustesse de l'algorithme de remaillage vis-à-vis du transport des champs de variables mécaniques de l'ancien vers le nouveau maillage.

Le forgeage à chaud d'une roue axisymétrique a été présenté. Les résultats obtenus ont été comparés avec les résultats expérimentaux disponibles. Le comportement matériel dépendant du temps et de la température est correctement simulé. Par ailleurs, la prise en compte du contact avec frottement de type Coulomb reproduit de façon réaliste le procédé industriel. L'efficacité de l'algorithme dynamique explicite et de l'algorithme de remaillage a également été mise en évidence.

Le dernier problème concerne le découpage axisymétrique de tôles. Il a permis d'évaluer les techniques de simulation développées. Si l'algorithme dynamique explicite s'avère plus robuste que l'algorithme quasi-statique implicite, il est en revanche notablement plus lent. Ceci nous amène à conseiller l'utilisation d'un algorithme de type explicite couplé à une méthode d'augmentation du pas de temps. Néanmoins, il est intéressant de disposer des deux types d'algorithmes. Le choix de l'un ou de l'autre dépend du type de problème traité. Les résultats présentés ont montré qu'il est nécessaire de remailler la tôle pour un traitement correct des conditions de contact. Enfin, les techniques de traitement de la rup-

ture ont été évaluées. Si l'utilisation d'un couplage entre déformation et endommagement permet de prédire de façon précise l'effort de découpage, elle pose en revanche plusieurs problèmes. D'une part, l'identification des paramètres matériels est une étape délicate. D'autre part, la convergence de ce type de calcul est difficile dans le cadre de l'utilisation d'un algorithme implicite. Enfin, pour le modèle de type Gurson, son utilisation pour des matériaux métalliques reste sujet à discussion. La méthode de propagation de fissures associée à un critère de rupture permet une prédiction du profil de rupture et de la courbe effort-déplacement du poinçon en bon accord avec les données expérimentales. L'effort est surestimé dans la mesure où l'effet de l'endommagement n'est pas pris en compte.

A partir des développements numériques effectués, nous avons réalisé un logiciel de calcul spécifiquement dédié au découpage de tôles. Parallèlement, un dispositif expérimental instrumenté a été conçu et réalisé. Le chapitre 6 présente ces outils numériques et expérimentaux. Leur intérêt en vue de mieux comprendre le comportement des métaux en découpage et d'aider au choix des paramètres technologiques est illustré sur quelques applications.

Chapitre 6

Réalisation d'outils numériques et expérimentaux d'aide à la caractérisation du comportement des métaux en découpage

Sommaire

6.1	Présentation du logiciel BLANKFORM	186
6.1.1	Introduction	186
6.1.2	Pré-processeur	186
6.1.3	Solveur	189
6.1.4	Post-processeur	189
6.2	Présentation du dispositif expérimental	190
6.2.1	Principales caractéristiques de l'outillage	190
6.2.2	Instrumentation	192
6.2.3	Bilan	194
6.3	Mise en œuvre des outils numériques et expérimentaux pour l'identification d'un critère de rupture	194
6.3.1	Introduction	194
6.3.2	Méthodologie d'identification d'un critère de rupture	195
6.3.3	Résultats expérimentaux	195
6.3.4	Identification numérique de la phase de rupture	197
6.4	Quelques applications de la simulation numérique pour l'aide au réglage des paramètres technologiques.	199
6.4.1	Introduction	199
6.4.2	Influence du jeu poinçon-matrice	199
6.4.3	Influence de la vitesse de coupe	202
	Conclusion	203

Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons présenté la modélisation retenue pour simuler le découpage. Sa mise en œuvre dans un programme éléments finis a été exposée au chapitre 4. Puis elle a été validée au chapitre 5 sur quelques exemples numériques.

Dans les deux premiers chapitres, nous avons indiqué que l'on observe dans l'industrie du découpage un intérêt croissant pour la simulation numérique. Nous avons également mis en avant le fait qu'il n'existe pas à l'heure actuelle de logiciel spécifiquement dédié à ce procédé.

La première partie de ce chapitre présente l'interface graphique de BLANKFORM, développée au cours de ces travaux, permettant de proposer un logiciel dédié au découpage pour les entreprises spécialisées.

Parallèlement aux développements numériques, nous avons également conçu et réalisé un poste de découpage expérimental instrumenté. Celui-ci est présenté dans la seconde partie. Son objectif principal est de permettre une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu, en caractérisant le comportement des métaux en découpage.

Dans la dernière partie, nous présenterons quelques exemples d'utilisation pratique des outils numériques et expérimentaux développés. Une méthodologie simplifiée d'identification d'un critère de rupture en découpage sera exposée. Puis nous présenterons deux études qualitatives portant sur l'influence du jeu poinçon-matrice et sur l'influence de la vitesse de découpage.

6.1 Présentation du logiciel BLANKFORM

6.1.1 Introduction

Pour répondre aux besoins des entreprises spécialisées en découpage des métaux, nous avons inclu le solveur présenté dans les chapitres 3 et 4 dans un produit complet proposant un pré-processeur et un post-processeur. L'originalité du logiciel BLANKFORM réside dans l'automatisation de la définition du problème éléments finis, et proposant une mise en données orientée métier. Cette dernière a été établie en relation avec les besoins exprimés par la société AUGÉ Découpage.

L'interface graphique a été développée avec les outils QT et VTK disponibles sous LINUX. Elle a été réalisée en collaboration avec Pascal Paquier, ingénieur de recherche dans l'équipe Mise en Forme des Matériaux, et Nicolas Pernin, doctorant dans cette équipe.

6.1.2 Pré-processeur

La Fig. 6.1 correspond à une vue d'ensemble de BLANKFORM.

Sur la Fig. 6.2, l'essentiel de la définition du problème géométrique est présenté. Elle comprend principalement : la nature et les dimensions du produit à découper, les dimensions des outils, les coefficients de frottement entre la tôle et les outils et la vitesse de découpage. C'est à partir de ces données pratiques que le maillage initial, ainsi que les paramètres de remaillage sont définis.

Une base de données de paramètres matériau a été intégrée à BLANKFORM, Fig. 6.3. Celui-ci est conçu pour intégrer simplement des résultats issus de la caractérisation

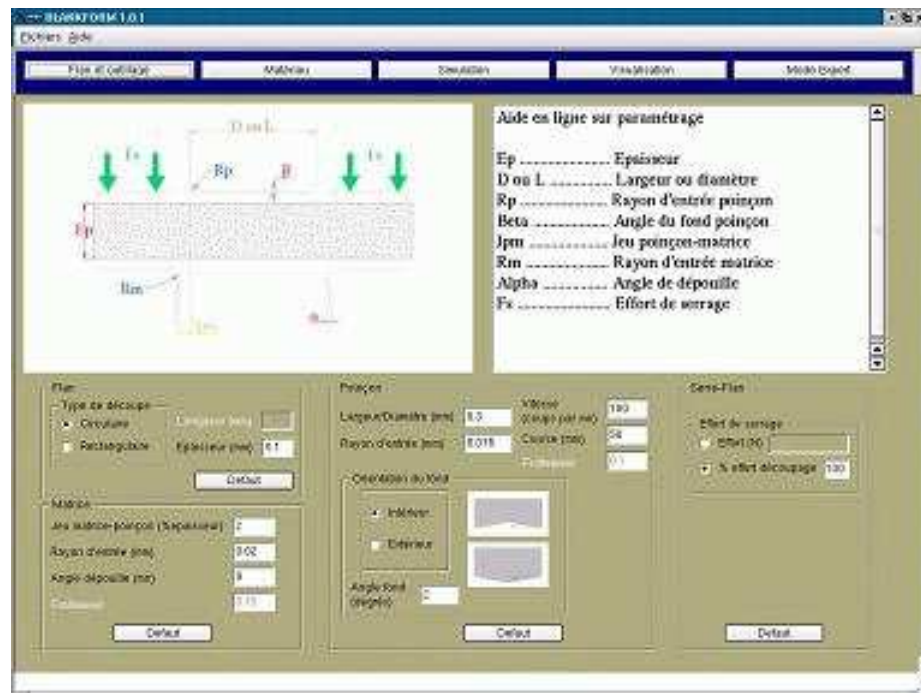


FIG. 6.1 – Vue d'ensemble de l'interface graphique du logiciel BLANKFORM.

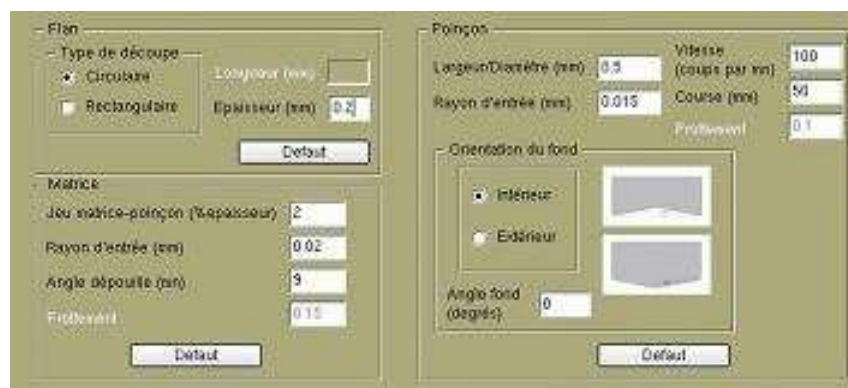


FIG. 6.2 – Mise en données technologique du découpage sous BLANKFORM.

expérimentale du comportement des matériaux découpés. Un exemple de mise en données des paramètres matériau est présenté sur la Fig. 6.4.

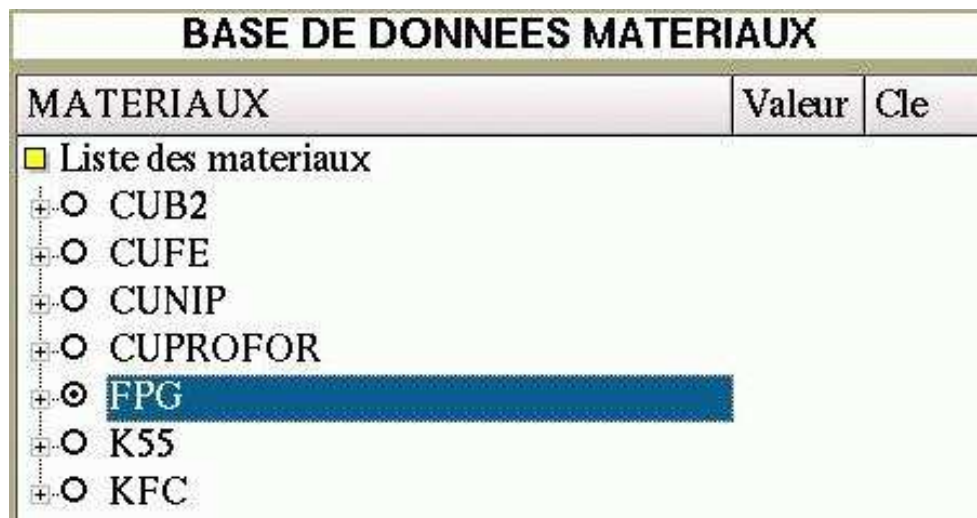


FIG. 6.3 – Couplage du logiciel avec une base de données matériaux évolutive.



FIG. 6.4 – Exemple d'une mise en données des paramètres matériau.

Les approches retenues pour traiter des mécanismes d'endommagement et de rupture peuvent être sélectionnées sous BLANKFORM, Fig. 6.5. Par défaut, les modèles d'endommagement couplés ne sont pas activés. Pour la phase de rupture, l'option par défaut consiste à ne pas traiter la propagation de fissures, donc à terminer le calcul dès que l'amorçage d'une fissure macroscopique est détecté. Ces choix par défaut offrent à l'utilisateur une approche simplifiée ne nécessitant pas le réglage des paramètres liés à l'endommagement et à la propagation de fissures. Ils permettent également d'obtenir une approximation des zones bombée, cisailée, arrachée, ainsi que de l'effort de découpage.

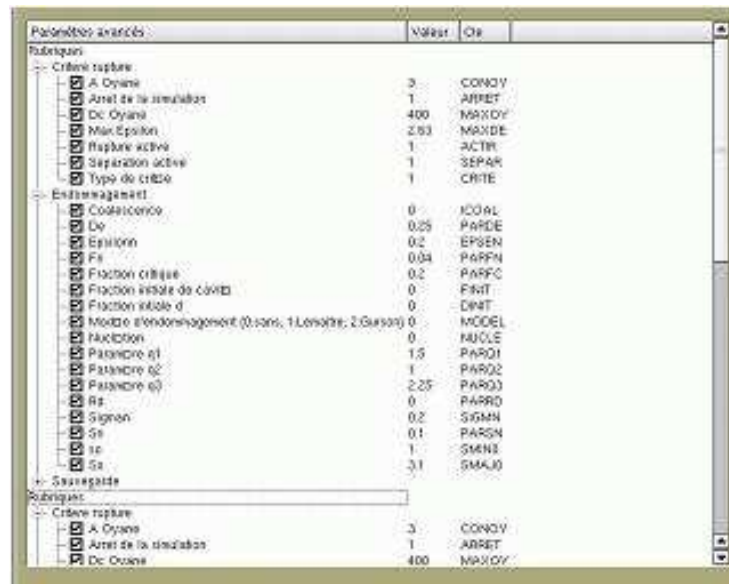


FIG. 6.5 – Sélection de la modélisation de l'endommagement et de la rupture.

6.1.3 Solveur

Avant le lancement d'un calcul, il est nécessaire de choisir le type d'algorithme d'intégration temporelle à utiliser, Fig. 6.6. L'option par défaut est l'algorithme quasi-statique implicite, pour les raisons de temps de calcul évoquées au chapitre 5.

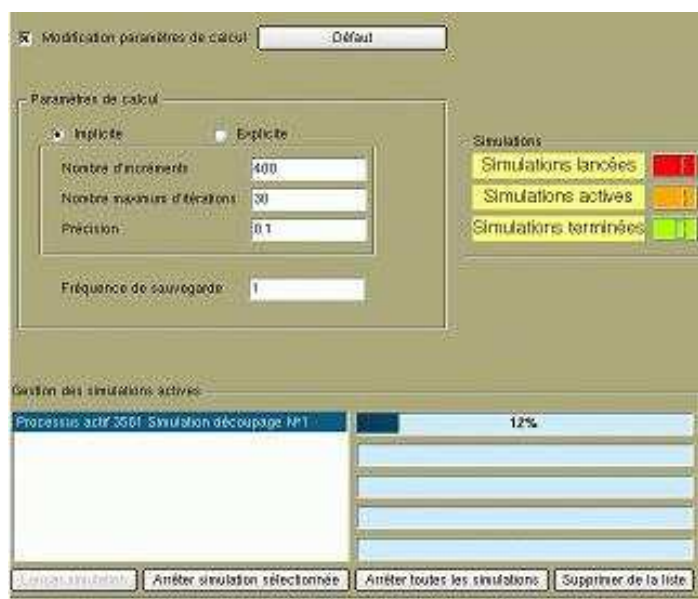


FIG. 6.6 – Choix du type d'algorithme d'intégration temporelle et indicateur de progression du calcul.

6.1.4 Post-processeur

Les résultats disponibles sous BLANKFORM concernent tout d'abord l'effort poinçon et la qualité du profil géométrique du produit découpé. La courbe d'effort est fournie

au cours du calcul, Fig. 6.7. En fin de calcul, les dimensions des zones caractéristiques du profil, ainsi que l'effort maximal et la pénétration correspondante, sont indiqués. Les isovalues des variables caractéristiques de l'état de déformation et de contrainte dans la tôle peuvent être consultées (endommagement, déformation plastique équivalente, température, tenseur des contraintes de Cauchy, notamment), Fig. 6.7.

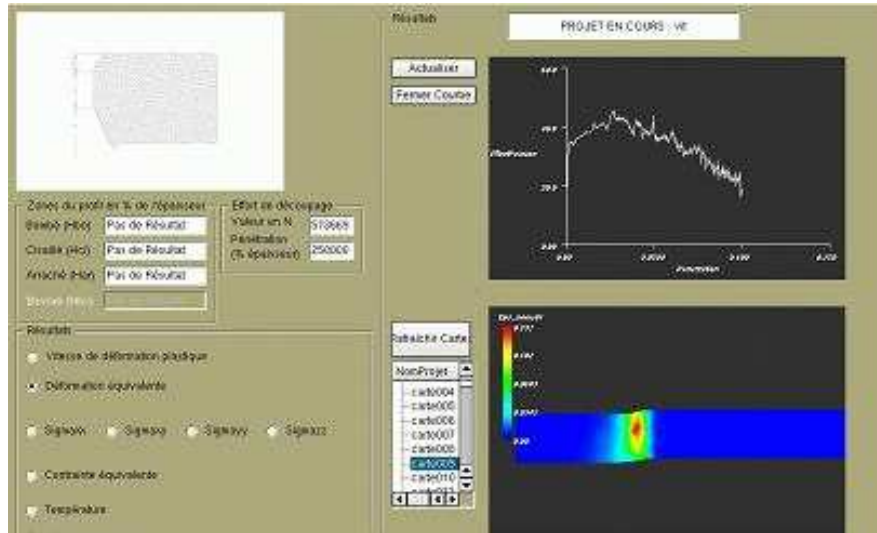


FIG. 6.7 – Quelques résultats disponibles sous BLANKFORM.

Le logiciel BLANKFORM permet donc une mise en données rapide et adaptée à l'industrie du découpage. Il fournit des informations sur l'effort de découpage, sur la qualité du produit découpé et sur l'état de déformation et de contrainte dans la tôle. Parallèlement aux développements numériques, un poste de découpage a été conçu et réalisé par l'équipe Mise en Forme des Matériaux du LMARC en collaboration avec la société AUGÉ Découpage (Lemiale *et al.*, 2001, 2002). Celui-ci doit permettre de caractériser le comportement des métaux fins en découpage. Ses principales caractéristiques sont présentées dans la section suivante.

6.2 Présentation du dispositif expérimental

6.2.1 Principales caractéristiques de l'outillage

Le poste de découpage est présenté sur la Fig. 6.8. Sur cette figure, une représentation schématique de la forme des découpes effectuées est également présentée. Il s'agit d'une forme rectangulaire de largeur 2 mm et de longueur 9 mm.

Le poste de découpage est composé de trois sous-ensembles : un bloc supérieur sur lequel est fixé le poinçon, un bloc intermédiaire sur lequel est fixé le serre flan et un bloc inférieur sur lequel est fixée la matrice.

Le jeu poinçon-matrice est défini par les largeurs respectives du poinçon et de l'ajour dans la matrice. Il est possible de le faire varier en changeant de poinçon.

Pendant la phase de découpage, le serre flan a une fonction de guidage du poinçon. Il sert également à maintenir la tôle en position sur la matrice. Lors de la remontée du poinçon, il facilite l'extraction du poinçon.

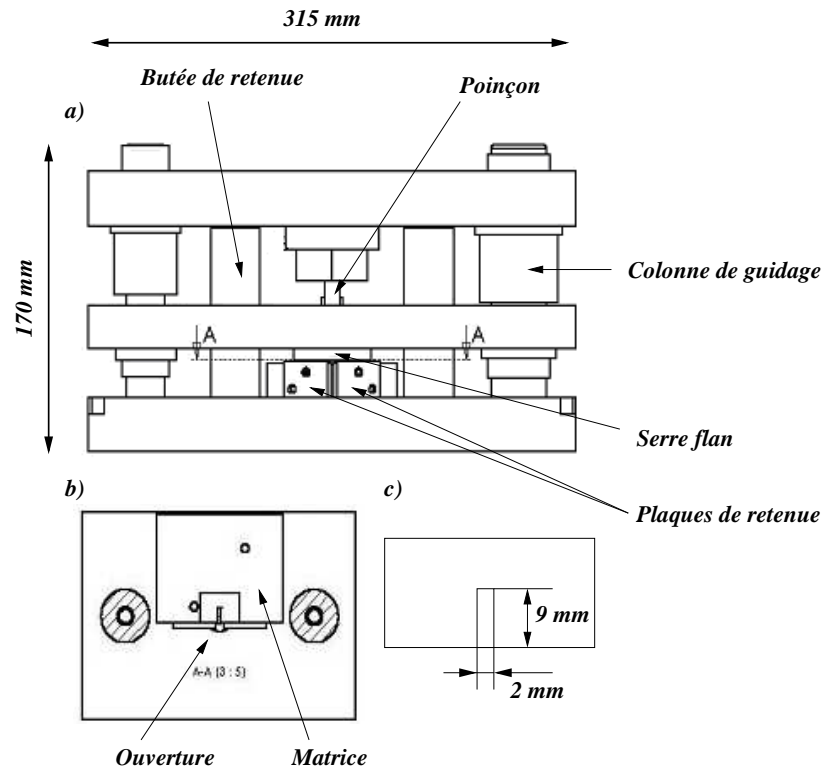


FIG. 6.8 – a), b) Représentation schématique de l'outil de découpage ; c) Représentation (non à l'échelle) des formes découpées.

L'effort de serrage (maintien de la tôle en découpage) est réalisé par l'intermédiaire de quatre ressorts pré-contraints (non représentés sur la Fig. 6.8). Chaque ressort ayant une raideur de 100 N.mm^{-1} , et étant pré-contraint sur 1 mm , on aboutit à un effort de serrage F_s tel que :

$$F_s = 4 \times 100 \Delta l + 4 \times 1 \times 100 = 400 (\Delta l + 1) \quad (6.1)$$

où Δl est la variation de longueur des ressorts, correspondant au niveau de pénétration du poinçon dans la tôle.

Rapporté à la surface de serrage S_s , on en déduit la pression P_s exercée par le serre flan sur la tôle, supposée répartie uniformément :

$$P_s = \frac{F_s}{S_s} \quad (6.2)$$

Soit :

$$P_s = \frac{400 (\Delta l + 1)}{150} \quad (\text{en MPa}) \quad (6.3)$$

Pour une tôle d'épaisseur 0.2 mm , on obtient donc une pression P_s comprise entre 2.6 MPa et 3.2 MPa .

Une vue en coupe de la matrice est présentée sur la (Fig. 6.8)_b. Sa caractéristique principale est son ouverture sur un côté, permettant ainsi l'enregistrement du découpage *in situ* par l'intermédiaire d'une caméra CCD. Les deux plaques de retenue fixées sur la matrice servent au positionnement de la tôle sur la matrice. En plaquant l'échantillon

contre celles-ci, on assure ainsi le fait que poinçon, tôle et matrice sont dans un même plan pour l'enregistrement vidéo. Enfin, un angle de dépouille de 9° est présent sur la matrice pour faciliter l'extraction du copeau et diminuer les frottements en matrice.

6.2.2 Instrumentation

Enregistrement de la courbe effort déplacement du poinçon

Pour enregistrer la pénétration du poinçon dans la tôle, un capteur inductif à noyau libre est placé entre les blocs poinçon et serre flan. Au cours de la descente du poinçon, le serre flan serre la tôle et reste donc fixe, par conséquent le déplacement relatif de ces blocs correspond à la pénétration du poinçon dans la tôle.

Pour mesurer l'effort du poinçon, la solution retenue ici est l'utilisation de quatre jauges de déformation collées directement sur le poinçon. Cette méthode présente néanmoins des inconvénients. Tout d'abord, le poinçon doit être manipulé avec précaution, notamment dans le cas d'un réaffutage. Compte tenu du nombre limité de coups frappés dans le cadre de nos essais, ce problème n'est pas pénalisant. De plus, cela contraint à instrumenter chaque nouveau poinçon, ce qui, outre le coût, présente surtout l'inconvénient d'être couteux en temps (temps d'instrumentation ajouté au temps d'étalonnage des jauges de déformation). Malgré cela, cette solution est privilégiée dans la mesure où l'on utilise un nombre limité de poinçons.

Un exemple de courbe effort-déplacement enregistrée avec ce dispositif est présenté sur la Fig. 6.9.

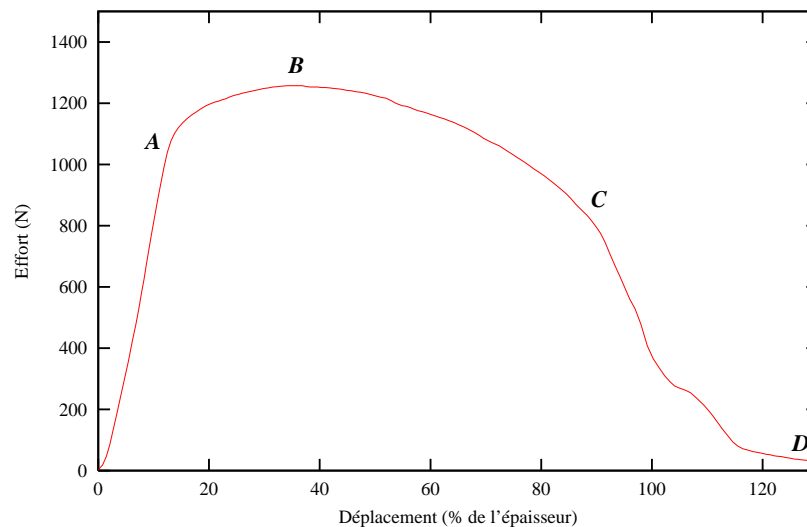


FIG. 6.9 – Exemple de courbe effort-déplacement du poinçon.

Sur ce graphe, on observe les différentes phases caractéristiques d'un essai de découpage :

- La portion de courbe linéaire OA correspond au comportement élastique de la tôle découpée.
- Dans la portion de courbe AB, le comportement est globalement élasto-plastique. Le point B correspond à l'effort maximal atteint au cours du découpage.
- La diminution de l'effort dans la portion de courbe BC est due à la réduction de section dans la zone cisailée, et à l'évolution de l'endommagement dans la tôle.

- Le point C correspond à un changement de pente de la courbe d'effort. À partir de ce point, une ou plusieurs fissures s'amorcent conduisant à la rupture de la tôle. L'amorçage d'une fissure est difficilement détectable sur les courbes obtenues, dans la mesure où l'on n'enregistre pas de brusque variation de pente. C'est donc l'analyse du profil après essai qui permet d'obtenir des informations sur ce point. L'effort dans la portion de courbe CD ne s'annule pas. Ceci est dû au frottement entre la tôle et les outils.

Il faut noter que la portion de courbe élastique est surestimée. En effet, on enregistre une portion linéaire jusqu'à un niveau de pénétration du poinçon de $30\ \mu\text{m}$ environ, ce qui correspond à 15 % de l'épaisseur pour une tôle d'épaisseur 0.2 mm. Nous pensons que cette surestimation de la portion de courbe élastique est due au fait qu'il existe un jeu au niveau de la tête du poinçon (zone de fixation du poinçon). Par conséquent, une partie du déplacement enregistré correspond au calage du poinçon en position.

La valeur précise de ce jeu résiduel n'a pu ni être éliminée, ni être quantifiée précisément dans le cadre de ces travaux. Par conséquent, pour s'affranchir de ce problème, le choix est fait de corriger l'enregistrement des courbes effort-déplacement du poinçon en négligeant la portion de courbe élastique. Pour l'exemple précédent, la courbe corrigée est présentée sur la Fig. 6.10. Sur cette courbe, F_{max} correspond à l'effort maximal de découpage et P_{max} à la pénétration correspondante. P_t est la pénétration de transition pour laquelle on enregistre un changement de pente plus ou moins prononcé.

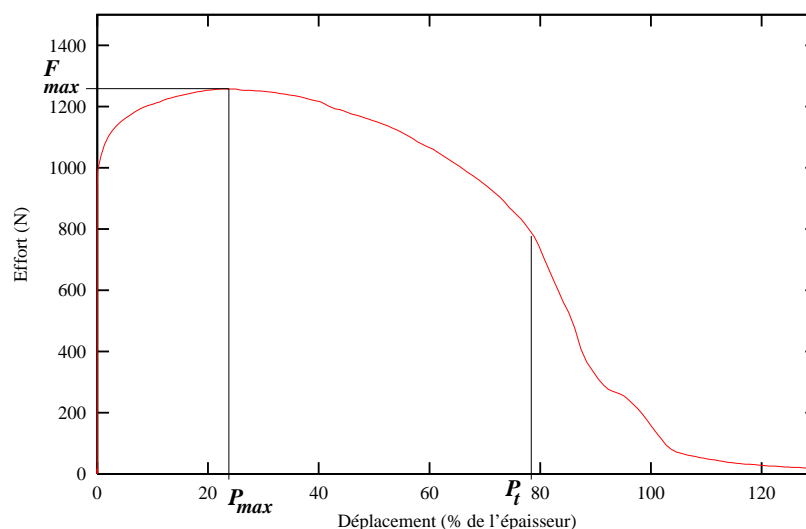


FIG. 6.10 – Courbe effort-déplacement du poinçon corrigée en négligeant la portion de courbe élastique.

Enregistrement vidéo du découpage dans l'épaisseur de la tôle

L'outil de découpage est prévu pour permettre l'enregistrement vidéo du découpage dans l'épaisseur de la tôle. Pour cela, une ouverture est pratiquée sur un côté de la matrice. Ce dispositif étant encore à l'heure actuelle en phase de mise au point, il est présenté dans l'annexe F. Nous nous limitons à présenter pour illustrer les possibilités d'un tel dispositif quelques images obtenues au cours d'un découpage, Fig. 6.11. L'épaisseur de la tôle est de 0.25 mm. La résolution obtenue est de l'ordre d'un micron par pixel.

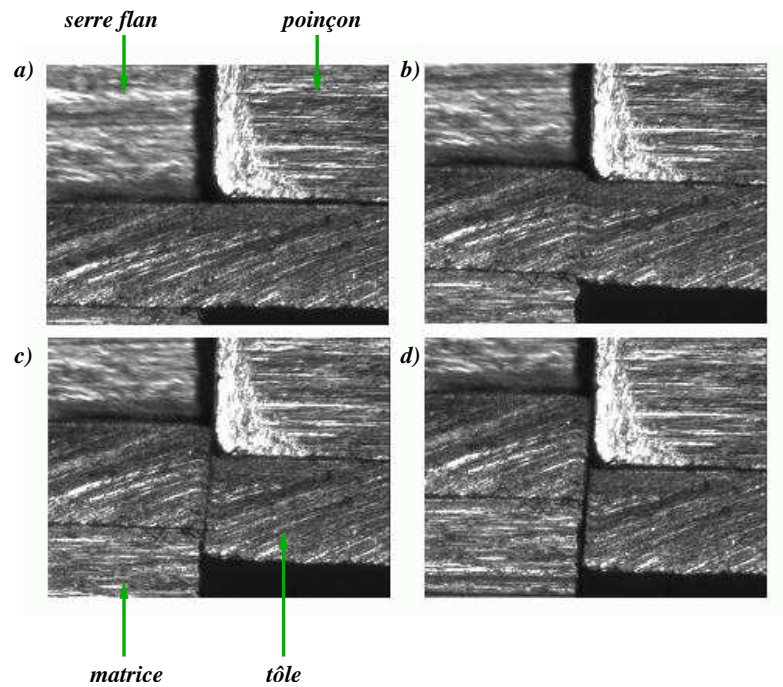


FIG. 6.11 – Images enregistrées lors du découpage d'une tôle en alliage cuivreux d'épaisseur 0.25 mm ; a) Pénétration du poinçon 0 % ; b) Pénétration 12 % ; c) Pénétration 28 % ; d) Pénétration 72 %.

6.2.3 Bilan

Le poste de découpage a été présenté. Il permet de découper des formes rectangulaires pour des tôles d'épaisseur pouvant varier de 0.05 mm à 2 mm. L'instrumentation pour la mesure *in situ* de la courbe effort-déplacement du poinçon est réalisée. Enfin, l'ouverture de la matrice sur un de ses côtés permet d'enregistrer l'essai de découpage dans l'épaisseur au moyen d'une caméra CCD équipée d'un zoom optique.

Ayant présenté brièvement le logiciel réalisé au cours de ces travaux, et le dispositif expérimental mis en place, nous proposons dans la suite de ce chapitre différentes utilisations possibles de ces outils.

6.3 Mise en œuvre des outils numériques et expérimentaux pour l'identification d'un critère de rupture

6.3.1 Introduction

L'exemple numérique de découpage présenté au chapitre 5 a montré que l'utilisation d'un modèle non couplé associé à un critère de rupture permet de déterminer avec une précision satisfaisante la qualité du profil géométrique dans l'épaisseur de la tôle. Il fournit également une bonne approximation de l'effort de découpage.

Si l'on souhaite utiliser ce type de modélisation en première approche, il est nécessaire d'identifier la valeur critique D_C du critère de rupture.

6.3.2 Méthodologie d'identification d'un critère de rupture

Plusieurs études ont été proposées pour réaliser l'identification des critères de rupture en découpage (Hambli et Reszka, 2002; Goijaerts, 1999; Goijaerts *et al.*, 2001). Hambli présente des résultats obtenus par identification inverse. Goijaerts réalise un couplage entre simulation numérique et expérimentation, en négligeant la phase de propagation des fissures. Cette méthode a été évaluée au chapitre 5 sur un calcul de découpage axisymétrique d'une tôle en acier d'épaisseur 2.5 mm. Si cette méthode donne de bons résultats dans le cas des essais effectués par Goijaerts, nous avons montré au chapitre 5 qu'elle est en général assez approximative.

Nous proposons la méthodologie d'identification suivante (Lemiale *et al.*, 2003); le profil géométrique du produit découpé expérimentalement est mesuré, la valeur critique à rupture D_C du critère choisi est alors recherchée numériquement à l'aide de la méthode de propagation de fissures. Elle correspond à la valeur critique pour laquelle on obtient un profil de découpe similaire à l'expérience.

Nous illustrons cette méthodologie dans la suite de cette section, en l'appliquant sur une tôle en alliage cuivreux d'épaisseur 0.2 mm.

6.3.3 Résultats expérimentaux

Caractéristiques mécaniques de la tôle découpée

La tôle découpée est un alliage cuivreux d'épaisseur 0.2 mm, de dénomination fournisseur 'CuNiP'. Pour des raisons de confidentialité, la composition chimique de cet alliage n'est pas fournie dans ce manuscrit. Ses principales caractéristiques mécaniques, obtenues à l'aide d'un essai de traction, sont présentées Tab. 6.1.

Grandeur	Valeur
E	113 000 MPa
ν	0.32
σ_y	450 MPa

TAB. 6.1 – Caractéristiques mécaniques du matériau CuNiP.

Les essais de traction effectués au LMARC sur ce type de matériau indiquent un comportement élasto-plastique parfaitement plastique, Greban (2003). Par conséquent, la contrainte d'écoulement sera prise telle que $\sigma_0 = \sigma_y$.

L'identification du comportement du matériau en traction est discutable puisque les sollicitations auxquelles est soumise la tôle en découpage s'apparentent davantage à des conditions de cisaillement simple. Cependant, la simulation numérique avec une loi de comportement identifiée en traction montrera que cette approche reste satisfaisante.

Comportement en découpage du matériau CuNiP

Profil de rupture du CuNiP

La mesure du profil géométrique dans l'épaisseur de la tôle a été réalisée au microscope optique, Fig. 6.12.



FIG. 6.12 – Profil géométrique de l'alliage cuivreux CuNiP d'épaisseur 0.2 mm (grossissement x200).

Les valeurs moyennes des parties bombée, cisaillée et arrachée, obtenues à partir des mesures effectuées sur 5 échantillons, sont consignées dans le Tab. 6.2. La taille de la bavure n'a pas été déterminée, dans la mesure où les essais réalisés jusqu'à présent n'ont pas donné de résultats véritablement fiables (importante dispersion des mesures).

Zone	Taille (% de l'épaisseur)
Bombée	11.3
Cisaillée	63.4
Arrachée	25.3

TAB. 6.2 – Mesures expérimentales du profil du CuNiP.

Des photographies de la zone arrachée ont été réalisées au Microscope Electronique à Balayage (MEB), Fig. 6.13. On observe la présence de vides de forme elliptique caractéristiques de la rupture ductile. Ces informations sont cohérentes avec celles disponibles dans la littérature sur le mode de rupture en découpage, Jana et Ong (1989).

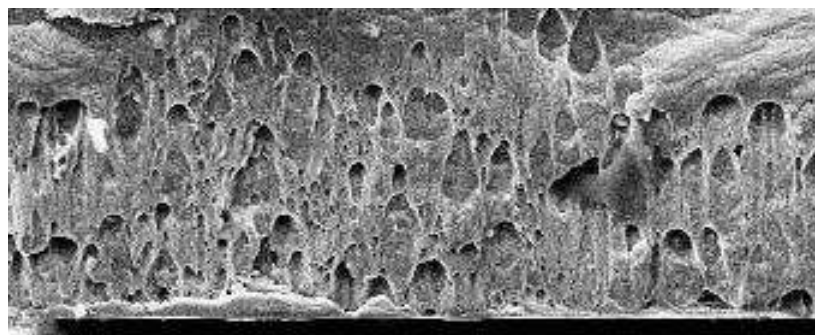


FIG. 6.13 – Photographie de la zone arrachée réalisée au MEB (grossissement x600).

Courbe effort-déplacement du CuNiP

La courbe effort-déplacement du poinçon est représentée sur la Fig. 6.14. Cette courbe correspond à la moyenne de cinq essais réalisés, corrigée en négligeant la partie élastique.

L'effort maximal est égal à 910 N. Il se situe à un niveau de pénétration du poinçon égal à 23 % de l'épaisseur de la tôle.

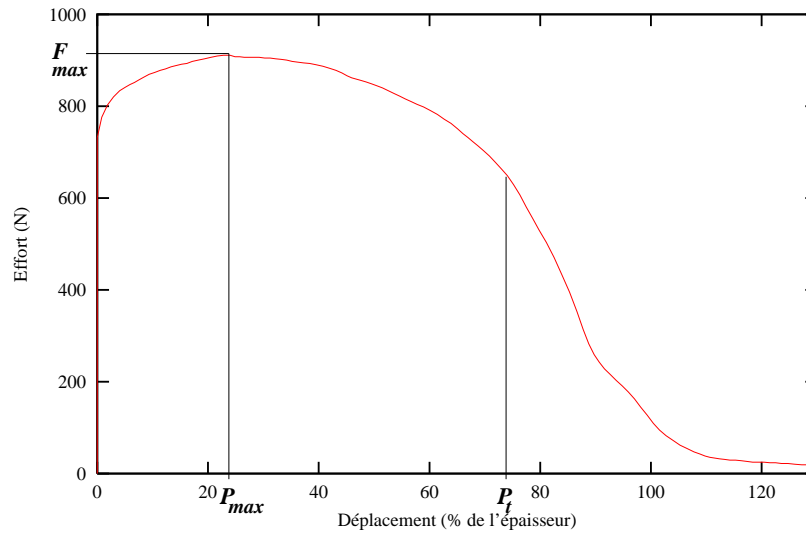


FIG. 6.14 – Courbe effort-déplacement du CuNiP.

Grandeur	Valeur
Largeur poinçon	2 mm
Jeu poinçon-matrice	15 % par face
Rayon arête poinçon	0.015 mm
Rayon arête matrice	0.015 mm
Epaisseur tôle	0.2 mm
Jeu poinçon-serre flan	5 % par face

TAB. 6.3 – Caractéristiques géométriques du découpage en déformations planes.

Le point P_t est difficile à détecter sur les enregistrements. Nous l'estimons à environ 73 %, ce qui paraît cohérent avec les mesures du profil présentées précédemment.

Ces différentes grandeurs seront utilisées pour la comparaison avec les résultats issus de la simulation numérique.

6.3.4 Identification numérique de la phase de rupture

Mises en données du calcul numérique

Compte tenu de la géométrie du problème, on adopte une hypothèse de déformations planes.

Le tableau Tab. 6.3 fournit les caractéristiques géométriques du problème.

Le maillage initial est composé de 515 éléments triangulaires à 6 nœuds et de 1120 nœuds. L'algorithme quasi-statique implicite est utilisé. Le déplacement du poinçon est décomposé en incréments de chargement de $5 \cdot 10^{-4}$ mm. Nous supposons un contact glissant entre la tôle et les outils. Le remaillage de la tôle est effectué périodiquement, tous les 4 % de pénétration.

Les paramètres matériau sont ceux présentés dans la section précédente. Le critère de Freudenthal est utilisé pour détecter l'amorçage d'une fissure. L'accroissement L d'une fissure est fixé à $2 \cdot 10^{-3}$ mm, soit 1 % de l'épaisseur. La taille de maille t_m en pointe de fissure est choisie égale à L .

Résultats

Les simulations numériques effectuées permettent d'obtenir une identification de la valeur D_C du critère de Freudenthal pour ce matériau. On obtient $D_C = 0.66$.

La courbe effort-déplacement du poinçon obtenue est comparée avec la courbe expérimentale, Fig. 6.15.

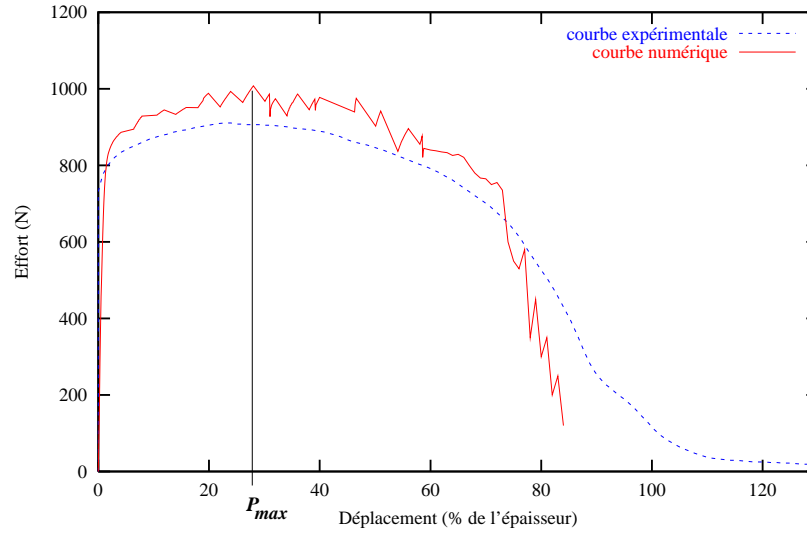


FIG. 6.15 – Comparaison des courbes effort-déplacement du poinçon expérimentale et calculée.

L'effort maximal obtenu numériquement est de 1008 N, ce qui correspond à un écart relatif de 10.7 % avec la valeur obtenue expérimentalement. L'écart s'explique d'une part par la non prise en compte de l'endommagement. D'autre part, la loi de comportement ayant été obtenue par un essai de traction, nous avons une approximation due à cette identification. La pénétration P_{max} correspondante est de 27.2 %. L'écart relatif par rapport à la valeur expérimentale de 23 % est d'environ 18 %, ce qui est non négligeable. Rappelons cependant que la partie élastique a été négligée sur la courbe expérimentale. La portion de courbe élastique obtenue numériquement correspond à environ 3 % de l'épaisseur.

Le profil géométrique obtenu par la simulation numérique est présenté sur la Fig. 6.16.

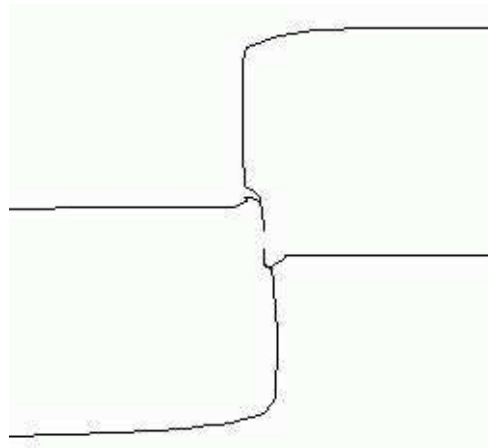


FIG. 6.16 – Profil géométrique obtenu par la simulation numérique.

Les dimensions des zones caractéristiques du profil sont fournies dans le Tab. 6.4. On obtient globalement un bon accord entre les dimensions du profil obtenues expérimentalement et celles obtenues par la simulation numérique. L'écart relatif le plus important est obtenu pour la partie arrachée. Ceci peut s'expliquer en partie par le manque de précision sur la mesure expérimentale dû à l'indétermination de la bavure.

Zone	Taille (% de l'épaisseur)	Ecart avec expérience
Bombée	10.8	4.42 %
Cisaillée	62.1	2 %
Arrachée	27.1	7 %
Bavure	4.1	

TAB. 6.4 – Mesures numériques du profil du CuNiP.

Nous avons montré comment il est possible d'identifier un critère de rupture en combinant la simulation numérique et les données expérimentales. Les résultats obtenus sont encourageants.

Nous présentons à présent quelques applications pratiques de la simulation numérique.

6.4 Quelques applications de la simulation numérique pour l'aide au réglage des paramètres technologiques.

6.4.1 Introduction

Une fois les paramètres matériels connus, il est possible d'étudier à l'aide de la simulation numérique l'influence des paramètres du procédé sur le résultat du découpage.

Le jeu poinçon-matrice est un des paramètres influençant le plus fortement les résultats en découpage. Nous avons réalisé plusieurs simulations numériques en faisant varier le jeu poinçon-matrice afin d'évaluer les possibilités de prévoir numériquement cette influence.

La vitesse de coupe est également un facteur important en découpage. Nous proposons une analyse qualitative de ce paramètre à l'aide des modèles de comportement élasto-viscoplastique présentés dans les chapitres 3 à 5.

6.4.2 Influence du jeu poinçon-matrice

Description du problème

Nous considérons un découpage en déformations planes dont les caractéristiques géométriques sont fournies dans le Tab. 6.5.

Le maillage initial est composé de 622 éléments triangulaires à 6 nœuds et de 1299 nœuds. La taille de maille moyenne dans la zone affinée du maillage est prise égale à la moitié du plus petit rayon d'outil, soit 0.075 mm. Le remaillage de la tôle est effectué périodiquement, tous les 4 % de pénétration.

Pour ces calculs, nous utilisons l'algorithme dynamique explicite. En effet, des difficultés de convergence sont observées pour les simulations réalisées avec un jeu poinçon-matrice réduit (inférieur à 5 %). Ces problèmes de convergence sont essentiellement dus

Grandeur	Valeur
Largeur ajour matrice	0.5 mm
Jeu poinçon-matrice	variant de 2 % à 15 % par face
Rayon arête poinçon	0.015 mm
Rayon arête matrice	0.015 mm
Epaisseur tôle	0.2 mm
Jeu poinçon-serre flan	5 % par face

TAB. 6.5 – Caractéristiques géométriques du découpage simulé et intervalle de variation du jeu poinçon-matrice testé.

à la gestion du contact, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 5. Le temps de calcul est plus important avec l'algorithme dynamique explicite (cf. chapitre 5). Toutefois, pour ces simulations, ce choix n'est pas pénalisant dans la mesure où le rapport entre l'épaisseur et la taille de maille minimale n'est pas très important, ce qui conduit à un nombre d'éléments finis raisonnable. Le temps de calcul moyen pour une simulation est d'environ 40 minutes (calculs effectués sur un processeur pentium 4 cadencé à 2.4 GHz).

Nous prendrons un coefficient de frottement de 0.15 entre la tôle et les outils. Le matériau utilisé est l'alliage cuivreux CuNiP étudié précédemment. Le critère de Freudenthal identifié est utilisé pour détecter l'amorçage d'une fissure.

Résultats

On peut dans un premier temps tracer l'évolution de l'effort maximal en fonction du jeu poinçon-matrice. Les résultats obtenus sont présentés sur la Fig. 6.17.

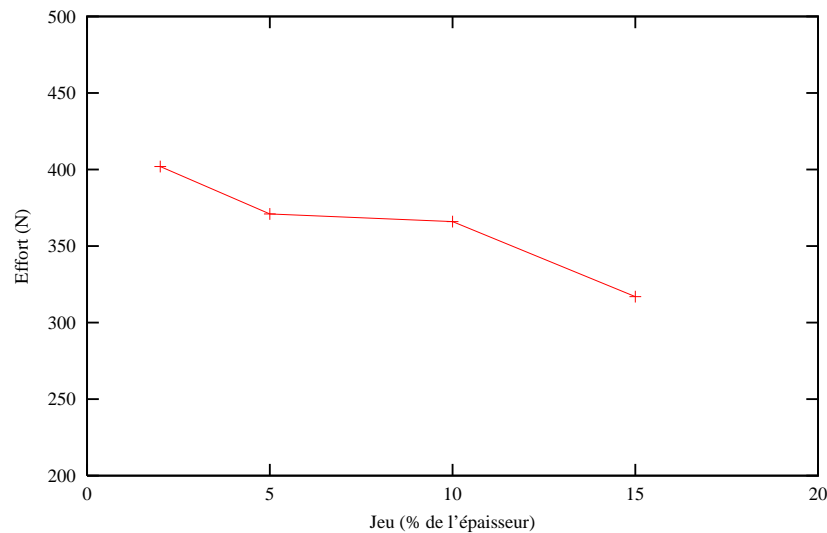
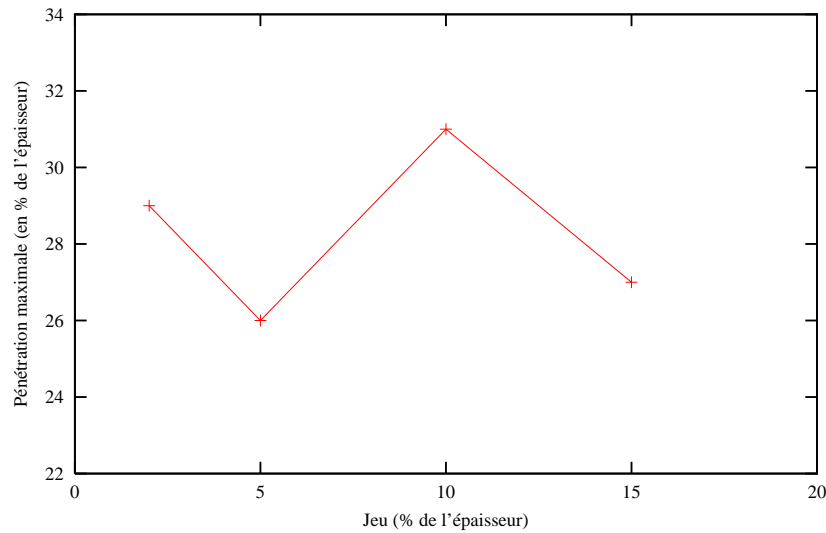


FIG. 6.17 – Evolution de l'effort maximal en fonction du jeu poinçon-matrice.

On observe une diminution de l'effort de découpage en fonction du jeu, ce qui est conforme aux résultats disponibles dans la littérature, Hambli (1996). L'évolution de la pénétration P_{max} en fonction du jeu est tracée sur la Fig. 6.18.

On ne note pas d'évolution de la pénétration P_{max} . Là encore, ce résultat est conforme à l'expérience.

FIG. 6.18 – Evolution de P_{max} en fonction du jeu poinçon-matrice.

Enfin, l'évolution des caractéristiques du profil géométrique en fonction du jeu est présentée, Fig. 6.19.

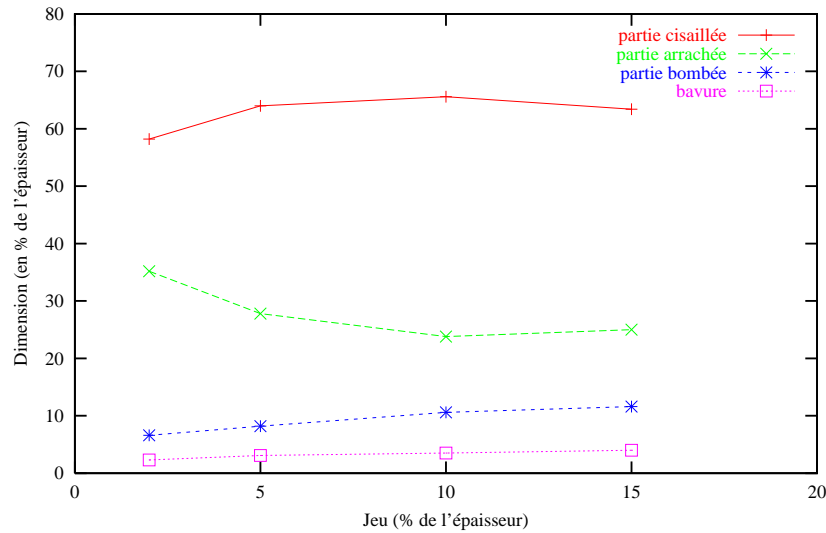


FIG. 6.19 – Evolution du profil de découpe en fonction du jeu poinçon-matrice.

La partie bombée augmente avec le jeu poinçon-matrice, cela est lié au fait que la flexion de la tôle augmente lorsque le jeu augmente. La bavure augmente avec le jeu poinçon-matrice, ce qui est conforme aux résultats expérimentaux. Concernant les parties cisailée et arrachée, on observe une diminution de la partie cisailée et une augmentation de la partie arrachée lorsque le jeu diminue, ceci pour des jeux inférieurs à 10 %. Cela est dû au type de critère utilisé pour prédire la rupture ductile. Le critère de Freudenthal s'écrit en fonction de la contrainte équivalente σ_{eq} et de la déformation plastique équivalente $\bar{\epsilon}^p$. Or, pour des jeux plus faibles, les déformations dans la zone cisailée sont plus intenses, ce qui conduit à une déformation plastique équivalente plus importante. Par conséquent, la valeur critique à rupture sera avec ce type de critère atteinte pour des niveaux de pénétration moins importants lorsque le jeu poinçon-matrice diminue.

Les résultats numériques montrent globalement un bon accord avec les informations disponibles dans la littérature sur l'influence du jeu poinçon-matrice. Un deuxième paramètre technologique est testé dans la section suivante, la vitesse de découpage.

6.4.3 Influence de la vitesse de coupe

Description du problème

La géométrie du problème est la même que dans la sous-section précédente. Le jeu poinçon-matrice est fixé à 10 % de l'épaisseur.

Dans les simulations numériques effectuées avec l'algorithme dynamique explicite, la vitesse imposée n'est pas la vitesse réelle de l'essai. Il s'agit d'une vitesse numérique permettant d'obtenir la solution quasi-statique avec un algorithme d'intégration temporelle dynamique. Cependant, le matériau étant ici sensible à la vitesse de déformation, il est nécessaire de conserver la vitesse réelle de l'essai. Compte tenu des vitesses testées, les temps de calcul obtenus avec l'algorithme dynamique deviennent importants. Nous choisissons donc de traiter le problème à l'aide de l'algorithme quasi-statique, dans la mesure où, pour cette configuration d'essai, on n'observe pas de problème de convergence. Le déplacement du poinçon est décomposé en incréments de 5.10^{-4} mm. Les autres paramètres numériques sont les mêmes que dans la section précédente.

Concernant les paramètres matériau, nous disposons d'une loi de comportement grandes déformations thermoélasto-viscoplastique donnée par la société Griset. Pour des raisons de confidentialité, cette loi n'est pas indiquée ici. Toutefois, il faut noter qu'elle a été identifiée pour une application spécifique de laminage à chaud. Son utilisation en découpage reste donc à valider. L'objectif étant ici de réaliser une étude qualitative de l'influence de la vitesse, ce choix s'avère suffisant en première approche.

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 3, le mouvement du poinçon pour un découpage industriel réalisé sur presse est le plus souvent imposé par un système bielle-manivelle. La vitesse de découpage, exprimée en règle générale en coups par minute, suit donc une loi de type sinusoïdal. Toutefois, pour simplifier la mise en données, nous considérerons une vitesse de découpage constante. On rappelle que la vitesse de découpage s'exprime sous la forme (cf. chapitre 3) :

$$v(t) = \frac{c}{2} \frac{2\pi n}{60} \sin\left(\frac{2\pi n}{60}t\right)$$

où c est la course de la presse, et n la cadence de presse, en coups par minute. Nous choisissons la valeur moyenne de la valeur absolue de la vitesse réelle, soit :

$$v = \frac{1}{2} \frac{c}{2} \frac{2\pi n}{60}$$

La course de presse est fixée à 16 mm, ce qui correspond aux courses utilisées par la société AUGÉ Découpage. Nous choisissons trois cadences de presse : 100 coups par minute, 500 coups par minute et 1000 coups par minute. Avec la relation précédente, on en déduit les trois vitesses testées : 0.04 m.s^{-1} , 0.2 m.s^{-1} et 0.4 m.s^{-1} .

Résultats

Nous nous limitons à présenter quelques résultats qualitatifs. En particulier, la rupture complète de la tôle ne sera pas étudiée dans cette section. La courbe Fig. 6.20 présente l'évolution de la courbe effort-déplacement simulée pour les trois vitesses de découpage.

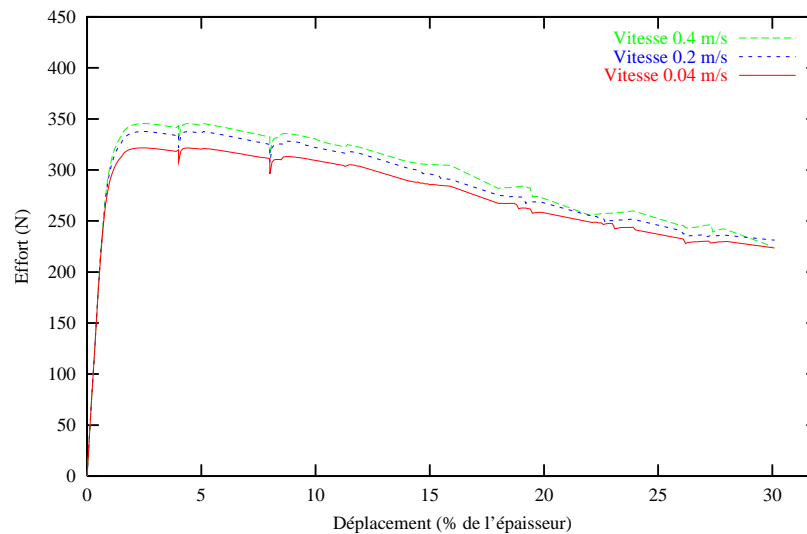


FIG. 6.20 – Evolution de la courbe effort-déplacement du poinçon en fonction de la vitesse de découpage.

On observe une augmentation de l'effort de découpage avec la cadence de presse. Cette augmentation traduit la loi de comportement viscoplastique, pour laquelle la contrainte équivalente augmente avec la vitesse de déformation. Par ailleurs, l'évolution de l'effort de découpage en fonction de la pénétration est similaire pour les trois vitesses testées. Cette évolution de l'effort de découpage en fonction de la vitesse est conforme aux résultats disponibles dans la littérature. Nos propres essais expérimentaux sur ce matériau ont mis en évidence, pour des vitesses plus lentes, le même type d'évolution. Enfin, on constate que la diminution de l'effort de découpage intervient pour des niveaux de pénétration très faibles. Ceci s'explique par l'influence de la température sur le comportement du matériau. L'augmentation de la température entraîne en effet un adoucissement du matériau.

Pour terminer, la distribution du champ de température dans l'épaisseur de la tôle est présentée pour les trois vitesses, cf. Fig. 6.21. L'accroissement maximal de température est obtenu pour une vitesse de 0.4 m/s, et vaut 262 K. Cette ordre de grandeur est cohérent avec les résultats présentés par Poizat *et al.* (2002a) sur des alliages cuivreux. Ils indiquent que l'échauffement calculé est compris entre 80 et 200 K.

Conclusion

Le logiciel BLANKFORM développé au cours de ces travaux a été présenté. Celui-ci permet par une interface graphique dédiée une mise en données rapide pour un industriel d'un découpage 2D plan ou axisymétrique. Il comprend également un module de post-traitement fournissant les données importantes en découpage : courbe d'effort poinçon, profil géométrique du produit découpé, isovaleurs dans l'épaisseur des variables calculées par la méthode des éléments finis.

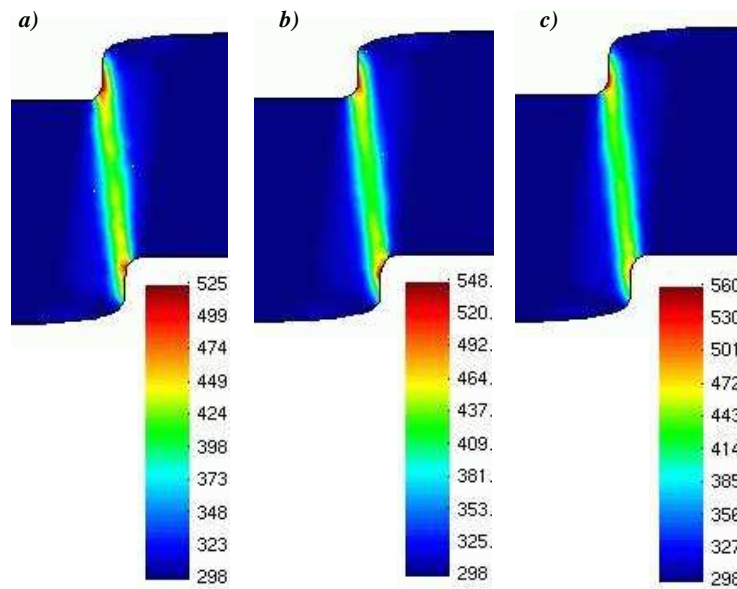


FIG. 6.21 – Distribution du champ de température pour une pénétration du poinçon de 30 % et pour une vitesse de découpage de a) 0.04 m/s ; b) 0.2 m/s ; c) 0.4 m/s.

Les caractéristiques du dispositif expérimental conçu et réalisé au LMARC ont été exposées. Celui-ci permet de découper des tôles d'épaisseur variant de 0.05 mm à 2 mm. Il est instrumenté afin de permettre l'enregistrement de la courbe effort-déplacement du poinçon. Enfin, une ouverture sur un côté de la matrice permet d'enregistrer le découpage dans l'épaisseur de la tôle par l'intermédiaire d'une caméra CCD.

Plusieurs applications ont été proposées pour illustrer l'intérêt des dispositifs numériques et expérimentaux mis en place. La première consiste à réaliser l'identification de la valeur critique d'un critère de rupture en découpage. Deux études paramétriques ont ensuite été présentées. Le jeu poinçon-matrice, paramètre influençant notablement la qualité du produit découpé, a d'abord été étudié. Nous avons montré que les résultats obtenus sont qualitativement en accord avec les résultats disponibles dans la littérature sur ce paramètre. Puis, l'influence de la vitesse de découpage a été analysée. Là encore, la comparaison qualitative avec les résultats de la littérature est satisfaisante.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la modélisation mécanique et à la simulation numérique du découpage de tôles. L'objectif principal de ce travail était de proposer un logiciel de simulation du découpage aussi réaliste que possible.

En effet, bien que l'on observe, depuis une dizaine d'années, un intérêt accru pour la simulation numérique du découpage, il n'existe à l'heure actuelle pas ou peu de logiciel spécifiquement dédié à ce procédé. En nous basant sur les études disponibles dans la littérature, nous avons proposé une modélisation mécanique aussi complète que possible.

Celle-ci comprend d'une part la résolution de l'équilibre global du système avec prise en compte des conditions de contact et de frottement. Les outils poinçon et matrice ont été supposés rigides. Le frottement est modélisé par un modèle de type Coulomb. D'autre part, la modélisation mécanique du comportement du matériau découpé a été présentée. Celle-ci permet de rendre compte du comportement dans toutes les phases de déformation. Au début du découpage, le comportement est élastique. Puis un écoulement plastique avec ou sans écrouissage a lieu. La sensibilité de cet écoulement à la vitesse de déformation et à la température a été prise en compte dans la modélisation. Parallèlement à la déformation plastique, un endommagement se développe dans la tôle. Deux modèles d'endommagement ont été retenus, un modèle de type Lemaître et un modèle de type Gurson. Ils permettent de rendre compte de la dégradation progressive des propriétés mécaniques du matériau. Enfin, une ou plusieurs fissures macroscopiques s'amorcent et se propagent dans la tôle, conduisant à la rupture complète de celle-ci. L'amorçage de ces fissures peut être détecté par l'intermédiaire de la variable d'endommagement si l'on utilise un modèle couplant déformation et endommagement. Nous avons également envisagé une approche dite découplée, dans laquelle l'endommagement de la tôle n'affecte pas ses propriétés mécaniques. L'amorçage de la rupture est alors détecté par une fonction critère. Différents critères de rupture parmi les plus utilisés ont été retenus. La propagation des fissures peut être traitée par des techniques numériques, compte tenu du fait que le trajet de propagation reste simple en découpage. Une fissure se propage dans la majorité des cas entre les arêtes poinçon et matrice.

La modélisation mécanique développée a été mise en œuvre dans un logiciel, BLANK-FORM, réalisé au cours de ces travaux et spécifiquement dédié au découpage. Celui-ci est basé sur la méthode des éléments finis.

Dans un premier temps, les développements numériques réalisés ont permis de disposer d'algorithmes de résolution robustes. Nous avons tout d'abord mis en place un algorithme de remaillage. L'importante distortion du maillage éléments finis rend en effet nécessaire ce type de méthodes. Puis, nous nous sommes intéressés aux méthodes d'intégration temporelle des équations d'équilibre. Cette étude permet désormais de disposer de deux types d'algorithmes de résolution : un algorithme de type quasi-statique implicite et un al-

gorithme de type dynamique explicite. Celui-ci peut s'avérer utile pour des problèmes fortement non linéaires pour lesquels la solution est difficile à obtenir par un algorithme implicite.

Dans un second temps, les modèles de comportement du matériau ont été intégrés au logiciel. Des méthodes numériques de traitement de la rupture ont été développées : la méthode d'élimination des éléments, qui est actuellement la plus utilisée dans la littérature, et une méthode originale de propagation de fissures basée sur l'endommagement calculé dans la tôle.

Des calculs ont été proposés pour valider les développements numériques. Les simulations numériques du découpage réalisées ont mis en évidence les points suivants :

- L'utilisation d'une méthode de remaillage est indispensable pour simuler correctement le contact entre la tôle et les outils et obtenir une bonne prédiction des parties cisailée et bombée. La prédiction de l'effort de découpage est également sensiblement améliorée.
- La courbe effort-déplacement du poinçon peut être simulée avec précision par une approche couplant déformation et endommagement. Cependant, ce type d'approche nécessite l'identification de paramètres matériels plus ou moins nombreux. Or, les essais de caractérisation classiques tels que les essais de traction ou de flexion sont éloignés du mode de déformation rencontré en découpage. L'utilisation en découpage de paramètres identifiés avec ces essais peut être discutable.
- L'approche découplée associée à une méthode numérique de traitement de la rupture conduit à un effort de découpage surestimé. Cependant, l'évolution de celui-ci est correctement prédite jusqu'à la rupture complète de la tôle. La méthode d'élimination des éléments reste une technique approximative nécessitant d'apporter un soin particulier au maillage éléments finis. La méthode de propagation de fissures proposée est moins sensible au maillage et elle permet de simuler correctement la chute de l'effort poinçon observée expérimentalement.

Dans la dernière partie de ce mémoire, nous avons présenté les outils numériques et expérimentaux désormais disponibles dans l'équipe Mise en Forme des Matériaux à l'issue de nos travaux. Le solveur développé a été couplé à une interface graphique permettant de proposer un logiciel dédié à la simulation numérique du découpage et orienté métier. De plus, un dispositif expérimental de découpage a été conçu et réalisé en collaboration avec la société AUGÉ Découpage. Il est instrumenté en effort et en déplacement, et il permet d'enregistrer le découpage dans l'épaisseur de la tôle grâce à une caméra CCD. Cet outil permet de caractériser le comportement des métaux en découpage. Plusieurs campagnes d'essais ont déjà été menées sur des tôles en alliages cuivreux d'épaisseur inférieure à 0.5 mm. Par ailleurs, nous avons présenté une première application de ces outils en proposant une méthodologie d'identification d'un critère de rupture couplant expérience et simulation numérique. Une fois connus les paramètres caractéristiques du comportement du matériau, il est alors possible de simuler un découpage afin de déterminer le réglage optimal des paramètres du procédé.

Les travaux présentés dans ce mémoire ouvrent maintenant plusieurs perspectives.

Tout d'abord, il est nécessaire d'effectuer une caractérisation complète du comportement des matériaux en découpage. Des actions ont été engagées sur ce point à travers une thèse menée en collaboration entre l'équipe Mise en Forme des Matériaux et la société AUGÉ Découpage. L'utilisation de techniques d'identification inverse pourrait s'avérer

intéressante pour réaliser cette identification en découpage. Le dispositif expérimental mis en place au LMARC permet d'appréhender le comportement des matériaux en découpage. Toutefois, plusieurs mises au point sont nécessaires. Il s'agit de fiabiliser l'enregistrement de la courbe effort-déplacement du poinçon au début de la pénétration d'une part, et d'améliorer le système d'analyse d'images d'autre part.

Concernant notre programme de calcul, plusieurs améliorations sont possibles. Tout d'abord, le temps de calcul de l'algorithme dynamique explicite peut être diminué. Ceci peut être fait dans un premier temps en intégrant une méthode d'accroissement du pas de temps critique. Par ailleurs, l'utilisation d'éléments triangulaires à 6 nœuds à intégration complète est un facteur influençant la durée du calcul. Une amélioration possible consisterait à utiliser un élément à intégration réduite, ou bien à utiliser un élément à interpolation linéaire couplée à un calcul de la pression dans l'élément (ceci pour satisfaire la condition d'incompressibilité). Le traitement du contact, tel qu'il est effectué dans le cas de l'algorithme implicite, n'est pas optimal. Les problèmes de convergence dus aux décollements des nœuds et aux oscillations possibles lors d'un changement de segment d'outil doivent être éliminés. Un lissage des normales au niveau des intersections entre les segments d'outils pourrait constituer une première solution.

Par ailleurs, la modélisation mécanique pourrait être sensiblement améliorée en envisageant une approche non locale pour le traitement des modèles couplés déformation-endommagement. Là encore, des travaux de thèse traitant de ce sujet sont en cours dans l'équipe Mise en Forme des Matériaux.

Nous avons montré dans ce mémoire quelques applications de notre logiciel pour la simulation d'un découpage. Il importe maintenant d'approfondir ces applications, en évaluant notre programme sur des cas industriels. Une collaboration avec AUGÉ Découpage est en cours, et devrait aboutir à une meilleure adéquation entre les besoins industriels et les possibilités offertes par BLANKFORM.

Enfin, plusieurs extensions de la simulation numérique sont possibles. L'outil développé peut permettre de traiter des conditions d'essais variées. Ainsi, la simulation d'un découpage mettant en jeu non pas un mais plusieurs poinçons pourrait être une extension très intéressante d'un point de vue industriel. Toutefois, la simulation en deux dimensions ne permet pas d'analyser l'ensemble des problèmes rencontrés dans la pratique. Une thèse portant sur la simulation du découpage en trois dimensions a été commencée dans l'équipe Mise en Forme des Matériaux. Elle pourra permettre d'envisager des problèmes mettant en jeu des géométries d'outils plus complexes.

Bibliographie

- AOKI, I. et TAKAHASHI, T. (2003). «Material flow analysis on shearing process by applying Fourier phase correlation method-analysis of piercing and fine-blanking». *Journal of Materials Processing Technology*, 6399 :1–8.
- ARAVAS, N. (1987). «On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :1395–1416.
- ATKINS, A. G. (1980). «On cropping and related processes». *International Journal of Mechanical Sciences*, 22 :215–231.
- BABA, O. M. S. A. (1997). *Méthodes de résolution numérique des problèmes de contact avec frottement. Application à la mise en forme des matériaux*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.
- BAIDA, M. (1998). *Génération automatique des maillages par une méthode de type Delaunay. Application à l'adaptation des maillages en élasticité linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.
- BALENDRA, R. et TRAVIS, F. W. (1970). «Static and dynamic blanking of steel of varying hardness». *International Journal of Machine Tool Design and Research*, 10 :249–271.
- BELLENGER, E. et BUSSY, P. (1998). «Plastic and viscoplastic damage models with numerical treatment for metal forming processes». *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 :591–596.
- BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. et MORAN, B. (2000). *Non linear finite elements for continua and structures*. Wiley, New-York.
- BEZZINA, S. (1996). *Modélisation théorique et simulation numérique du procédé de découpage des tôles*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- BOUBAKAR, M. L., VANG, L., TRIVAUDEY, F. et PERREUX, D. (2003). «A meso-macro finite element modelling of laminate structures. Part II : time-dependent behaviour». *Composite structures*, 60 :275–305.
- BOUCHARD, P. O. (2000). *Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- BOUCHARD, P. O., BAY, F., CHENOT, J. L. et HUDIN, O. (2001). «Modeling of sheet metal cutting by coupling damage and crack propagation theories». Dans *Simulation*

- of Materials Processing : Theory, Methods and Applications-Proc. of NUMIFORM01*, 1001–1006.
- BOULMANE, L. (1994). *Application des techniques implicites-explicites de la dynamique transitoire à la simulation numérique en mise en forme des métaux*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.
- BREITLING, J., PFEIFFER, B., ALTAN, T. et SIEGERT, K. (1997). «Process control in blanking». *Journal of Materials Processing Technology*, 71 :187–192.
- BROKKEN, D. (1999). *Numerical modelling of ductile fracture in blanking*. Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands.
- BROKKEN, D., BREKELMANS, W. A. M. et BAAIJENS, F. P. T. (2000). «Predicting the shape of blanked products : a finite element approach». *Journal of Materials Processing Technology*, 103 :51–56.
- CHABENAT, A. et MARTIN, R. (1978). «Découpage-poinçonnage». *Techniques de l'ingénieur*, B7561 :1–22.
- CHAMBERT, J. (2001). *Analyse et modélisation de la rupture ductile par des modèles micromécaniques fondés sur l'approche locale*. Thèse de doctorat, Université de Clermont-Ferrand.
- CHANG, T. M. (1950). «Shearing of Metal Blanks». *Journal of the Japan Institute of Metals*, 78 :393–414.
- CHEN, Z. H., TANG, C. Y., LEE, T. C. et CHAN, L. C. (2002). «Numerical simulation of fine-blanking process using a mixed finite element method». *International Journal of Mechanical Sciences*, 44 :1309–1333.
- CHEROUAT, A. et SAANOUNI, K. (2003). «Numerical simulation of sheet metal blanking process using a coupled finite elastoplastic damage modelling». *International Journal of Forming Processes*, 6 :7–32.
- CHOY, C. M. et BALENDRA, R. (1996). «Experimental Analysis of Parameters Influencing Sheared-Edge Profiles». Dans *Proc. of the 4th Int. Conf. on Sheet Metal (SheMet96)*, 101–110.
- COIRIER, J. (2001). *Mécanique des milieux continus*. Dunod, Paris.
- DOS SANTOS, W. et ORGAN, A. J. (1973). «Deformation in the ductile fracture processes examined by the viscoplasticity method». *International Journal of Machine Tool Design and Research*, 13 :217–232.
- FANG, G. et ZENG, P. (2002). «Finite element simulation of the effect of clearance on the forming quality in the blanking process». *Journal of Materials Processing Technology*, 5684 :1–6.
- FAURA, F., GARCIA, A. et ESTREMS, M. (1998). «Finite element analysis of optimum clearance in the blanking process». *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 :121–125.

- FAURA, F., GARCIA, A., LOPEZ, J. et SEBASTIAN, M. A. (1996a). «Blanking of stainless steel : criteria of wear limitation». Dans *Proc. of the 5th International Conference on the Technology of Plasticity (ICTP)*, 645–654.
- FAURA, F., LOPEZ, J., SEBASTIAN, M. A. et LUIS, C. (1996b). «Blanking of stainless steel : tool life equation model». Dans *Proc. of the 5th International Conference on the Technology of Plasticity (ICTP)*, 655–664.
- FAURA, F., SEBASTIAN, M. A. et ZAMORA, R. (2001). «A decision support system for sheet metal blanking process parameters selection». *Journal of Materials Processing Technology*, 118 :371–376.
- FILICE, L. et MICARI, F. (2001). «Numerical and experimental analysis of fine-edge blanking operations». Dans *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications-Proc. of NUMIFORM01*, 971–976.
- FRANÇOIS, D., PINEAU, P. et ZAOUI, A. (1995a). *Comportement mécanique des matériaux - élasticité et plasticité*. Hermes, Paris.
- FRANÇOIS, D., PINEAU, P. et ZAOUI, A. (1995b). *Comportement mécanique des matériaux - viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*, chapitre 1-3. Hermes, Paris.
- GEIGER, M., VOLLERSTEN, F. et KALS, R. (1996). «Fundamentals on the Manufacturing of Sheet Metal Microparts». *Annals of the C.I.R.P.*, 45/1 :277–282.
- GELIN, J. C. (1999). «Structures anélastiques». Cours de troisième année, ENSMM Besançon.
- GHOSH, A., RAM, V. R. et POPAT, P. B. (1985). «A new approach to the mechanics of the blanking operation : theoretical model and experimental verification». *Journal of Mechanical Working Technology*, 11 :215–228.
- GOIJAERTS, A. M. (1999). *Prediction of Ductile Fracture in Metal Blanking*. Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands.
- GOIJAERTS, A. M., GOVAERT, L. E. et BAAIJENS, F. P. T. (2001). «Evaluation of ductile fracture models for the different metals in blanking». *Journal of Materials Processing Technology*, 110 :312–323.
- GOLOVASCHENKO, S. F. (1999). «Numerical and Experimental Analysis of the Trimming Process». Dans *Proc. of the 4th International Conference and workshop on numerical simulation of 3D sheet forming processes (NUMISHEET)*, 621–627.
- GOUVEIA, B. P. P. A., RODRIGUES, J. M. C. et MARTINS, P. A. F. (2000). «Ductile fracture in metalworking : experimental and theoretical research». *Journal of Materials Processing Technology*, 101 :52–63.
- GREBAN, F. (2003). *Découpabilité des alliages cuivreux pour le secteur électronique*. Mémoire de DEA, ENSMM, Besançon.

- GURSON, A. L. (1977). «Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part I : yield criteria and flow rules for porous ductile media». *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15.
- HABRAKEN, A. M. (2001). *Contributions to constitutive laws of metals : micro-macro and damage models. Part C : Damage models applied to metals*. Thèse d'agrégation de l'enseignement supérieur, Université de Liège.
- HAMBLI, R. (1996). *Etude expérimentale, numérique et théorique du découpage des tôles en vue de l'optimisation du procédé*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers d'Angers.
- HAMBLI, R. (2001a). «Blanking tool wear modeling using the finite element method». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41 :1815–1829.
- HAMBLI, R. (2001b). «Comparison between Lemaitre and Gurson damage models in crack growth simulation during blanking process». *International Journal of Mechanical Sciences*, 43 :2769–2790.
- HAMBLI, R. (2001c). «Finite element simulation of fine blanking processes using a pressure-dependent damage model». *Journal of Materials Processing Technology*, 116 :252–264.
- HAMBLI, R. (2002). «Prediction of burr height formation in blanking processes using neural network». *International Journal of Mechanical Sciences*, 44 :2089–2102.
- HAMBLI, R. (2003). «BLANKSOFT : a code for sheet metal blanking processes optimization». *Journal of Materials Processing Technology*, 141 :234–242.
- HAMBLI, R., POTIRON, A. et KOBİ, A. (2003). «Application of design of experiment technique for metal blanking processes optimization». *Mécanique et Industries*, 4 :175–180.
- HAMBLI, R. et RESZKA, M. (2002). «Fracture criteria identification using an inverse technique method and blanking experiment». *International Journal of Mechanical Sciences*, 44 :1349–1361.
- HATANAKA, N., YAMAGUCHI, K. et TAKAKURA, N. (2003). «Finite element simulation of the shearing mechanism in the blanking of sheet metal». *Journal of Materials Processing Technology*, 139 :64–70.
- HOJO, H. (1967). «Shearing Mechanisms of Phenolic Paper Base Laminated Sheets». *Annals of the C.I.R.P.*, 14 :409–428.
- HOMSI, M., MORANÇAY, L. et ROËLANDT, J. M. (1996). «Techniques de remaillage appliquées au découpage des métaux». *Revue européenne des éléments finis*, 5 :297–321.
- JANA, S. et ONG, N. S. (1989). «Effect of punch clearance in the high-speed blanking of thick metals using an accelerator designed for a mechanical press». *Journal of Mechanical Working Technology*, 19 :55–72.

- JEONG, S. H., KANG, J. J. et OH, S. I. (1996). «A study on shearing mechanism by FEM simulation». Dans *Proc. of the 5th International Conference on the Technology of Plasticity (ICTP)*, 631–634.
- JIMMA, T. (1963). «The theoretical research on the blanking of a sheet material». *Bulletin of the Japan Society Mechanical Engineers*, 23 :568–576.
- JOHNSON, W. et SLATER, R. A. C. (1967). «A survey of the slow and fast blanking of metals at ambient and high temperatures». Dans *Proc. of the International Conference of Manufacturing Technology*, 825–851.
- KALS, R. et ECKSTEIN, R. (1998). «Miniaturization in sheet metal working». Dans *Proc. of the 6th Int. Conf. on Sheet Metal (SheMet98)*, 15–24.
- KLINGENBERG, W. et SINGH, U. P. (2003). «Finite element simulation of the punching/blanking process using in-process characterisation of mild steel». *Journal of Materials Processing Technology*, 134 :296–302.
- KO, D. C., KIM, B. M. et CHOI, J. C. (1997). «Finite-element simulation of the shear process using the element-kill method». *Journal of Materials Processing Technology*, 72 :129–140.
- KOMORI, K. (2001). «Simulation of shearing of bars : effect of ductile fracture criterion». Dans *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications-Proc. of NUMIFORM01*, 965–970.
- KONDO, K. et SUZUKI, H. (1996). «Research on the accuracy of sheared products by different working principles in precision shearing». *Journal of Materials Processing Technology*, 56 :70–77.
- KWAK, T. S., KIM, Y. J. et BAE, W. B. (2002). «Finite element analysis on the effect of die clearance on shear planes in fine blanking». *Journal of Materials Processing Technology*, 130-131 :462–468.
- LEE, C. H. et KOBAYASHI, S. (1970). «Elastoplastic analysis of plane-strain and axisymmetric flat punch indentation by the finite-element method». *International Journal of Mechanical Sciences*, 12 :349–370.
- LEE, S. B., KIM, D. H. et KIM, B. M. (2002). «Development of optimal layout design system in multihole blanking process». *Journal of Materials Processing Technology*, 130 :2–8.
- LEE, T. C., CHAN, L. C. et WU, B. J. (1995). «Straining behaviour in blanking process - fine blanking vs conventional blanking». *Journal of Materials Processing Technology*, 48 :105–111.
- LEMAÎTRE, J. et CHABOCHE, J. L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.
- LEMIALE, V. et PICART, P. (2004). «Modelling and simulation of precision blanking for very thin components». Dans *Proc. of the 10th International Conference METAL FORMING-communication acceptée*.

- LEMIALE, V., PICART, P. et MEUNIER, S. (2001). «Experimental and numerical analysis of the final blank shape of thin parts in blanking process». *International Journal of Forming Processes*, 4 :319–333.
- LEMIALE, V., PICART, P. et MEUNIER, S. (2002). «Découpage de métaux fins : caractérisation expérimentale, modélisation et simulation». *Journal de Physique IV*, Pr11 :343–352.
- LEMIALE, V., PICART, P. et MEUNIER, S. (2003). «Numerical simulation of blanking process for industrial applications». Dans *Proc. of the 6th Esaform Conference on Material Forming*, 211–214.
- LI, Y. M. et PENG, Y. H. (2002). «Fine-blanking process simulation by rigid viscous-plastic FEM coupled with void damage». *Finite Elements in Analysis and Design*, 39 :457–472.
- MAILLARD, A. (1991). *Etude expérimentale et théorique du découpage*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- MAILLARD, A. (1999). «Efforts et jeux en découpage et poinçonnage». Fiches conseil, CETIM.
- MAITI, S. K. (1982). «A numerical study on the edge-profile during shearing of bars using the principles of linear elastic fracture mechanics». *Journal of Mechanical Design*, 104 :661–665.
- MAITI, S. K., AMBEKAR, A. A., SINGH, U. P., DATE, P. P. et NARASIMHAN, K. (2000). «Assessment of influence of some process parameters on sheet metal blanking». *Journal of Materials Processing Technology*, 102 :249–256.
- MARIAGE, J. F. (2003). *Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes.
- MARIAGE, J. F., SAANOUNI, K., LESTRIEZ, P. et CHEROUAT, A. (2002). «Numerical simulation of ductile damage in metal forming processes. A simple predictive model-Part 1 and 2». *International Journal of Forming Processes-Prediction of Defects in Material Processing*, 5 :363–390.
- MAUREL, V., OSSART, F. et BILLARDON, R. (2002). «A simplified model of residual stresses induced by punching». *International Journal of Forming Processes-Prediction of Defects in Material Processing*, 5 :391–400.
- MEUNIER, S. (2004). *Analyse expérimentale du découpage de précision à grande vitesse d'alliages cuivreux en faible épaisseur*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.
- MIANNAY, D. (1995). *Mécanique de la rupture*. Les éditions de physique, Les Ulis, France.
- MURAKAWA, M., JIN, M. et THIPPRAKMAS, S. (2001). «Three-dimensional finite-element simulation of fine blanking». Dans *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications-Proc. of NUMIFORM01*, 977–981.

- NOBLE, C. F. et OXLEY, P. L. B. (1963). «Crack formation in blanking and piercing». *International Journal of Production Research*, 2 :265–274.
- OYANE, M., SATO, T., OKIMOTO, K. et SHIMA, S. (1980). «Criteria for ductile fracture and their applications». *Journal of Mechanical Working Technology*, 4 :65–81.
- PICART, P. (1986). *Contribution à la résolution numérique des problèmes élastoplastiques et élastoviscoplastiques en transformations finies*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes.
- PINSKY, P. M., ORTIZ, M. et PISTER, K. S. (1983). «Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 40 :137–158.
- POIZAT, C., CAMPAGNE, L., DARIDON, L., AHZI, S., HUSSON, C. et MERLE, L. (2003). «Modeling and simulation of thin sheet blanking using damage and rupture criteria». *International Journal of Forming Processes*.
- POIZAT, C., HUSSON, C., AHZI, S., BAHLOULI, N. et MERLE, L. (2002a). «Modeling of thin sheet blanking with a micromechanical approach». *International Journal of Forming Processes-Prediction of Defects in Material Processing*, 5 :423–432.
- POIZAT, C., HUSSON, C., AHZI, S., CAMPAGNE, L., DARIDON, L. et MERLE, L. (2002b). «Modélisation de la découpe de tôles minces par un modèle mécanistique». Dans *Colloque Matériaux 2002 : de la conception à la mise en œuvre (CD)*.
- POPAT, P. B., GHOSH, A. et KISHORE, N. N. (1989). «Finite-element analysis of the blanking process». *Journal of Mechanical Working Technology*, 18 :269–282.
- POST, J. et VONCKEN, R. (1996). «FEM Analyses of the punching process». Dans *Proc. of the 4th Int. Conf. on Sheet Metal (SheMet96)*, 159–169.
- PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A. et VETTERLING, W. T. (1995). *Numerical Recipes in C : the art of scientific computing*, chapitre 9. Cambridge university Press.
- PYTTEL, T., JOHN, R. et HOOGEN, M. (2000). «A finite element based model for the description of aluminium sheet blanking». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40 :1993–2002.
- QUINLAN, G. et MONAGHAN, J. (1998). «Finite element analysis of blanking». Dans *Proc. of the 6th Int. Conf. on Sheet Metal (SheMet98)*, 205–213.
- RACHIK, M., ROELANDT, J. M. et MAILLARD, A. (2002). «Some phenomenological and computational aspects of sheet metal blanking simulation». *Journal of Materials Processing Technology*, 128 :256–265.
- RAULEA, L. V., GOIJAERTS, A. M., GOVAERT, L. E. et BAAIJENS, F. P. T. (2001). «Size effects in the processing of thin metal sheets». *Journal of Materials Processing Technology*, 115 :44–48.

- RICE, J. R. et TRACEY, D. M. (1969). «On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17 :201–217.
- ROESSIG, K. M. et MASON, J. J. (1999a). «Adiabatic shear localization in the dynamic punch test, part I : experimental investigation». *International Journal of Plasticity*, 15 :241–262.
- ROESSIG, K. M. et MASON, J. J. (1999b). «Adiabatic shear localization in the dynamic punch test, part II : numerical simulations». *International Journal of Plasticity*, 15 :263–283.
- SAMUEL, M. (1998). «FEM simulations and experimental analysis of parameters of influence in the blanking process». *Journal of Materials Processing Technology*, 84 :97–106.
- SCHULER (1967). *Memento découper emboutir*. Schuler, Stuttgart.
- SCHULER (1998). *Metal Forming Handbook*, chapitre 4, 268–359. Springer, Berlin.
- SHUQIN, X., HOOGEN, M., PYTTEL, T. et HOFFMANN, H. (2002). «FEM simulation and experimental research on the AlMg4.5Mn0.4 sheet blanking». *Journal of Materials Processing Technology*, 5600 :1–6.
- SIDOROFF, F. (1982). «Cours sur les grandes déformations». Rapport GRECO 51, Ecole d'été Sophia-Antipolis.
- SIMO, J. C. et HUGHES, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*, tome 7 de *Interdisciplinary Applied Mechanics*. Springer, New-York.
- SINGH, U. P., KLINGENBERG, W. et URQUHART, W. (1994). «Effect of tool geometry on punching performance». *Journal of Engineering for Industry*, 116 :508–513.
- STAUB, C. (1998). *Modélisation dynamique des procédés de forgeage*. Thèse de doctorat, Laboratoire de mécanique des solides. INSA de Lyon.
- STEGEMAN, Y. M., GOIJAERTS, A. M., BROKKEN, D., BREKELMANS, W. A. M., GOVAERT, L. E. et BAAIJENS, F. P. T. (1999). «An experimental and numerical study of a planar blanking process». *Journal of Materials Processing Technology*, 87 :266–276.
- SUKUMAR, N., MOES, N., MORAN, B. et BELYTSCHKO, T. (2000). «Extended finite element method for three-dimensional crack modelling». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :1549–1570.
- TAUPIN, E., BREITLING, J., WU, W. T. et ALTAN, T. (1996). «Material fracture and burr formation in blanking results of FEM simulations and comparison with experiments». *Journal of Materials Processing Technology*, 59 :68–78.
- THOREN, A. (1995). «Découpage et cisaillement à grande vitesse, Découpage sur presse et avec procédés à haute énergie-les évolutions». *Publications CETIM*, 33–41.
- TILL, E. T. et KIRCHEBNER, A. (2001). «On modelling the damage process of cutting cold rolled sheets». Dans *Proc. of the 4th Esaform Conference on Material Forming*, 221–224.

- TISLEY, R. et HOWARD, F. (1958). «Recent investigations into the blanking and piercing of sheet materials». *Machinery*, 93 :151–158.
- TVERGAARD, V. (1990). «Material failure by void growth to coalescence». *Advances in applied mechanics*, 27 :83–151.
- VAZ, M. et BRESSAN, J. D. (2002). «A computational approach to blanking processes». *Journal of Materials Processing Technology*, 125-126 :206–212.
- WADI, I. et BALENDRA, R. (1999). «Using neural networks to model the blanking process». *Journal of Materials Processing Technology*, 91 :52–65.
- WICK, C. (1984). «Sheet metal blanking and forming». *Tools and Manufacturing Engineers Handbook*, 2 :412–425.
- WISSELINK, H. (2000). *Analysis of guillotining and slitting, finite element simulations*. Ph.D. Thesis, University of Twente, The Netherlands.
- WONG, V. G. et DAS, M. K. (1975). «Analysis of stresses in bar cropping». Dans *Proc. of the 15th Int. Mach. Tool Res. Conf.*, 617–624.
- YOSHIDA, Y., UKAWA, N. et ISHIKAWA, T. (2001). «Deformation analysis of the shearing process considering the fracture». Dans *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications-Proc. of NUMIFORM01*, 959–964.
- ZHANG, Z. L. (1995). «Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 121 :29–44.
- ZHOU, Q. et WIERZBICKI, T. (1996). «A tension zone model of blanking and tearing of ductile metal plates». *International Journal of Mechanical Sciences*, 38 :303–324.

Annexe A

Principales caractéristiques de l'élément triangulaire à six nœuds

Nous présentons dans cette annexe l'élément fini que nous avons utilisé dans la majorité des calculs présentés aux chapitres 5 et 6.

L'élément triangulaire à 6 nœuds utilisé possède 3 nœuds en chacun de ses sommets et 3 nœuds au milieu de chaque arête. En pratique, plutôt que d'effectuer les calculs sur l'élément réel, il est courant d'utiliser un élément de référence, ce qui simplifie les calculs.

L'élément de référence est un élément de forme simple transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique κ , cf. Fig. A.1.

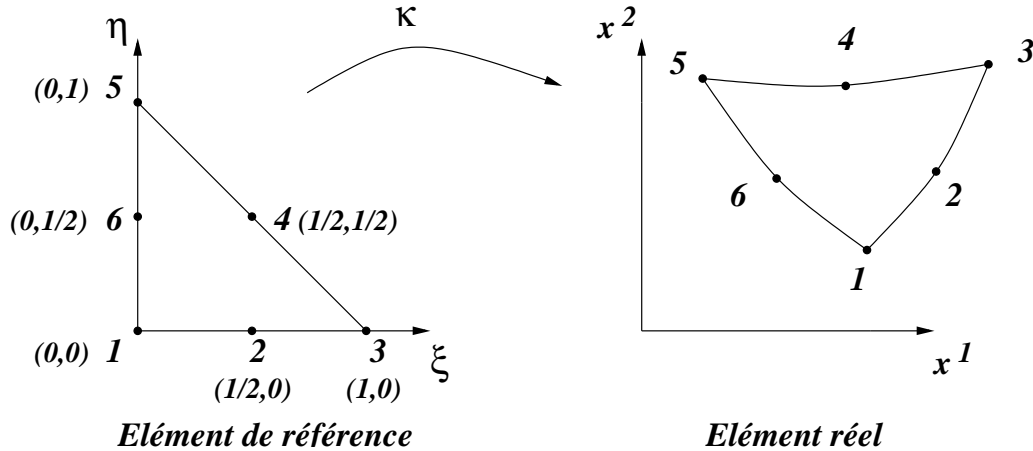


FIG. A.1 – Passage de l'élément de référence à l'élément réel par la transformation κ , pour l'élément triangulaire à 6 nœuds.

On associe à l'élément de référence un repère (ξ, η) . Le repère (x^1, x^2) est associé à l'élément réel. En déformations planes, ce repère correspond aux coordonnées cartésiennes (x, y) . En axisymétrie, il correspond à un repère cylindrique (r, z) .

Le passage de l'élément de référence à l'élément réel s'effectue par :

$$x^j = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) x_i^j \quad j = \{1, 2\} \quad (\text{A.1})$$

où N_i sont les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme. $(x_i^j)_{j=1,2}$ sont les coordonnées du nœud i .

L'élément est choisi isoparamétrique, *ie* les fonctions de forme pour l'interpolation de la géométrie et du mouvement sont les mêmes. Celles-ci ont la forme suivante :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = (2p - 1)p \\ N_2(\xi, \eta) = 4p\xi \\ N_3(\xi, \eta) = (2\xi - 1)\xi \\ N_4(\xi, \eta) = 4\xi\eta \\ N_5(\xi, \eta) = (2\eta - 1)\eta \\ N_6(\xi, \eta) = 4p\eta \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$p = 1 - \xi - \eta \quad (\text{A.3})$$

L'interpolation réalisée est donc quadratique.

La matrice des fonctions de forme N intervenant dans le chapitre 4 s'écrit :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

où les variables ξ, η ont été omises pour simplifier l'écriture.

On introduit également dans le chapitre 4 la matrice gradient des fonctions de forme B .

- En déformations planes, celle-ci a pour expression, en notant $(x^1, x^2) = (x, y)$:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

- En axisymétrie, celle-ci a pour expression, en notant $(x^1, x^2) = (r, z)$:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial r} & \frac{\partial N_5}{\partial z} & \frac{\partial N_5}{\partial r} & \frac{\partial N_6}{\partial z} & \frac{\partial N_6}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{N_4}{r} & 0 & \frac{N_5}{r} & 0 & \frac{N_6}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Pour calculer B , il est nécessaire de calculer les dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées de l'élément réel. Ceci est réalisé en écrivant que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

où K est la matrice jacobienne de la transformation κ définie par :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \eta} & \frac{\partial x^2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Les dérivées intervenant dans cette relation sont calculées à partir de la relation (A.1). On obtient :

$$\frac{\partial x^j}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i^j \quad j = \{1, 2\} \quad (\text{A.9})$$

Le calcul numérique des intégrales élémentaires écrites au chapitre 4 s'effectue par la méthode des points de Gauss. Compte tenu du degré des polynômes définissant les fonctions de forme, on doit utiliser au minimum quatre points de Gauss pour réaliser l'intégration.

Toutefois, l'intégration est ici effectuée avec 6 points de Gauss. Ce choix est dû au transport des champs mécaniques dans l'algorithme de remaillage. Une des étapes du remaillage consiste à transporter les champs calculés des points de Gauss aux nœuds. Or, si le nombre de points de Gauss est inférieur au nombre de nœuds, on effectue une pondération qui a pour effet de lisser les résultats. Pour éviter ce lissage, on choisit un nombre de points de Gauss égal au nombre de nœuds. Ce choix présente l'inconvénient d'augmenter légèrement le temps de calcul.

La position des points de Gauss, ainsi que le poids affecté à chacun d'eux, sont donnés dans le Tab. A.1.

Point de Gauss	ξ	η	Poids
1	$\simeq 0.445948$	$\simeq 0.445948$	$\simeq 0.111690$
2	$\simeq 0.108103$	$\simeq 0.445948$	$\simeq 0.111690$
3	$\simeq 0.445948$	$\simeq 0.108103$	$\simeq 0.111690$
4	$\simeq 0.091576$	$\simeq 0.091576$	$\simeq 0.054975$
5	$\simeq 0.816847$	$\simeq 0.091576$	$\simeq 0.054975$
6	$\simeq 0.091576$	$\simeq 0.816847$	$\simeq 0.054975$

TAB. A.1 – Coordonnées et poids des points de Gauss dans l'élément de référence pour l'élément triangulaire à 6 nœuds.

Annexe B

Calcul des gradients de déformation et des taux de déformation

Pour les schémas d'intégration locaux des lois de comportement développés dans le chapitre 4, le calcul de la prédiction élastique nécessite la connaissance de \underline{F}_n^{n+1} , de $\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1}$, de J_{n+1} et de $\underline{D}_{n+\alpha}$. Par ailleurs, pour calculer la prédiction élastique sur la configuration intermédiaire d'intégration (nécessaire pour calculer la direction de la correction plastique), il faut calculer $\underline{F}_n^{n+\alpha}$. Ces calculs sont fournis ci-après.

B.1 Calcul de F_n^{n+1}

\underline{F}_n^{n+1} s'écrit sous la forme :

$$\underline{F}_n^{n+1} = \nabla_n \vec{x}_{n+1} \quad (\text{B.1})$$

Or,

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta \vec{u} \quad (\text{B.2})$$

où $\Delta \vec{u}$ désigne l'incrément de déplacement connu entre t_n et t_{n+1} .

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, cet incrément de déplacement est connu aux nœuds de la structure. Pour déterminer l'incrément correspondant au point de Gauss considéré, on utilise l'interpolation déjà utilisée, (équation (4.5), chapitre 4) :

$$\Delta \vec{u} = \sum_{i=1}^n N_i \Delta \vec{u}_i \quad (\text{B.3})$$

où n est le nombre de noeuds de l'élément, et N_i sont les fonctions de forme de l'élément.

Or, d'après (B.2) :

$$\nabla_{n+1} \vec{x}_n = \nabla_{n+1} \vec{x}_{n+1} - \nabla_{n+1} \Delta \vec{u} \quad (\text{B.4})$$

La dérivation est effectuée relativement aux coordonnées x_{n+1} car celles-ci sont continuellement mises à jour (schéma lagrangien réactualisé).

On obtient en utilisant (B.3) :

$$\nabla_{n+1} \vec{x}_n = \underline{1} - \sum_{i=1}^n \nabla_{n+1} N_i \Delta \vec{u}_i \quad (\text{B.5})$$

Or :

$$\nabla_{n+1} \vec{x}_n = \left(\nabla_n \vec{x}_{n+1} \right)^{-1} \quad (\text{B.6})$$

En substituant dans (B.1) :

$$\boxed{\underline{F}_n^{n+1} = \left(\underline{1} - \sum_{i=1}^n \nabla_{n+1} N_i \Delta \vec{u}_i \right)^{-1}} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Calcul de $F_{n+\alpha}^{n+1}$

$\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1}$ est égal à :

$$\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} = \underline{F}_0^{n+1} \left(\underline{F}_0^{n+\alpha} \right)^{-1} \quad (\text{B.8})$$

soit, en utilisant (équation (4.90), chapitre 4) :

$$\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} = \underline{F}_0^{n+1} \left[(1 - \alpha) \underline{F}_0^n + \alpha \underline{F}_0^{n+1} \right]^{-1} \quad (\text{B.9})$$

Ce qui s'écrit successivement :

$$\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} = \left[\{ (1 - \alpha) \underline{F}_0^n + \alpha \underline{F}_0^{n+1} \} \left(\underline{F}_0^{n+1} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{B.10})$$

$$\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} = \left[(1 - \alpha) \left(\underline{F}_n^{n+1} \right)^{-1} + \alpha \underline{1} \right]^{-1} \quad (\text{B.11})$$

$$\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} = \left[\left(\underline{F}_n^{n+1} \right)^{-1} \{ (1 - \alpha) \underline{1} + \alpha \underline{F}_n^{n+1} \} \right]^{-1} \quad (\text{B.12})$$

Et finalement :

$$\boxed{\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} = \left[(1 - \alpha) \underline{1} + \alpha \underline{F}_n^{n+1} \right]^{-1} \underline{F}_n^{n+1}} \quad (\text{B.13})$$

B.3 Calcul du jacobien J_{n+1}

Puisque la loi de comportement est donnée en fonction du tenseur de Kirchhoff, il est également nécessaire de calculer le jacobien de la transformation $J_{n+1} = \det \underline{F}_0^{n+1}$ pour pouvoir estimer le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}_{n+1}$. Cette opération est effectuée en exploitant le fait que :

$$\underline{F}_0^{n+1} = \underline{F}_n^{n+1} \underline{F}_0^n \quad (\text{B.14})$$

donc :

$$\boxed{J_{n+1} = \det \underline{F}_n^{n+1} J_n} \quad (\text{B.15})$$

B.4 Calcul du taux de déformation

$\underline{D}_{n+\alpha}$ est défini par :

$$\underline{D}_{n+\alpha} = \nabla_{n+\alpha}^S \vec{v} \quad (\text{B.16})$$

où $\nabla_{n+\alpha}^S \vec{v}$ est le gradient symétrisé de \vec{v} par rapport à $\vec{x}_{n+\alpha}$.

Or,

$$\vec{v} \simeq \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} \quad (\text{B.17})$$

D'où

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha} = \nabla_{n+\alpha}^S \Delta \vec{u} \quad (\text{B.18})$$

Et, d'après (B.2) :

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha} = \nabla_{n+\alpha}^S \left(\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n \right) \quad (\text{B.19})$$

Ce qui s'écrit :

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha} = \left\{ \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} - \underline{F}_{n+\alpha}^n \right\}^S \quad (\text{B.20})$$

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha} = \left\{ \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} - \left(\underline{F}_n^{n+1} \right)^{-1} \underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \right\}^S \quad (\text{B.21})$$

En utilisant (B.13), on obtient :

$$\Delta t \underline{D}_{n+\alpha} = \left\{ \left[\underline{1} - \left(\underline{F}_n^{n+1} \right)^{-1} \right] \left[(1 - \alpha) \underline{1} + \alpha \underline{F}_n^{n+1} \right]^{-1} \underline{F}_n^{n+1} \right\}^S \quad (\text{B.22})$$

Et finalement :

$$\boxed{\Delta t \underline{D}_{n+\alpha} = \left\{ \left[(1 - \alpha) \underline{1} + \alpha \underline{F}_n^{n+1} \right]^{-1} \left[\underline{F}_n^{n+1} - \underline{1} \right] \right\}^S} \quad (\text{B.23})$$

B.5 Calcul de $F_n^{n+\alpha}$

On calcule $\underline{F}_n^{n+\alpha}$ par :

$$\underline{F}_n^{n+\alpha} = \underline{F}_{n+1}^{n+\alpha} \underline{F}_n^{n+1} \quad (\text{B.24})$$

D'où :

$$\boxed{\underline{F}_n^{n+\alpha} = \left(\underline{F}_{n+\alpha}^{n+1} \right)^{-1} \underline{F}_n^{n+1}} \quad (\text{B.25})$$

Annexe C

Calcul de l'opérateur tangent pour le comportement élasto-plastique

Si l'on résout les équations d'équilibre par un algorithme de type implicite, il est nécessaire de déterminer l'opérateur tangent cohérent avec l'algorithme d'intégration des contraintes utilisé. Les calculs sont développés ci-après pour le modèle de comportement élasto-plastique. La détermination de l'opérateur tangent pour les autres modèles s'effectue de la même façon et n'est donc pas détaillée.

La différentiation de la loi de comportement nous permet d'écrire que :

$$\partial \underline{\sigma} = J^{-1} \underline{\underline{C}}^e : \partial \underline{\varepsilon}^e \quad (\text{C.1})$$

Soit, en écrivant que $\partial \underline{\sigma} = \partial \underline{s} + \partial(\sigma_m \underline{1})$:

$$\partial \underline{\sigma} = \partial \underline{s} + J^{-1} K \underline{1} \otimes \underline{1} : \partial \underline{\varepsilon} \quad (\text{C.2})$$

Par ailleurs, rappelons que l'on a :

$$\underline{n} = \frac{3}{2} \frac{\underline{s}}{\sigma_{eq}}$$

et

$$\sigma_{eq} - \sigma_0 = 0$$

d'où :

$$\underline{s} = \frac{2}{3} \sigma_0 \underline{n}$$

Soit à calculer :

$$\partial \underline{s} = \frac{2}{3} \partial(\sigma_0 \underline{n}) = \frac{2}{3} \frac{\partial(\sigma_0 \underline{n})}{\partial \underline{\varepsilon}} : \partial \underline{\varepsilon} \quad (\text{C.3})$$

Or :

$$\frac{\partial(\sigma_0 \underline{n})}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \underline{\varepsilon}} \otimes \underline{n} + \sigma_0 \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (\text{C.4})$$

On calcule dans un premier temps $\frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\varepsilon}}$:

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{s}^e} \frac{\partial \underline{s}^e}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (\text{C.5})$$

où \underline{s}^e est la partie déviatorique de la prédiction élastique.

En utilisant le fait que :

$$\frac{\partial \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|}}{\partial \underline{s}} = \frac{1}{\|\underline{s}\|} \left(\underline{\underline{I}} - \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \otimes \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \right) \quad (\text{C.6})$$

et :

$$\frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} = \frac{\underline{s}^e}{\|\underline{s}^e\|}$$

on obtient :

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{s}^e} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\underline{s}^e\|} \left(\underline{\underline{I}} - \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \otimes \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \right) \quad (\text{C.7})$$

De plus, d'après la loi de comportement, on a :

$$\frac{\partial \underline{s}^e}{\partial \underline{\varepsilon}} = J^{-1} 2G \frac{\partial \underline{e}}{\partial \underline{\varepsilon}}$$

où \underline{e} est le déviateur du tenseur de déformations totales.

Soit :

$$\frac{\partial \underline{s}^e}{\partial \underline{\varepsilon}} = J^{-1} 2G \left(\underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) \quad (\text{C.8})$$

En substituant (C.7) et (C.8) dans (C.5), on obtient :

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{3}{2}} J^{-1} 2G \frac{1}{\|\underline{s}^e\|} \left(\underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} - \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \otimes \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \right) \quad (\text{C.9})$$

Il ne reste plus qu'à calculer le terme $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \underline{\varepsilon}}$ intervenant dans (C.4) :

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \frac{\partial \bar{\varepsilon}^p}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \frac{\partial \dot{\lambda} \Delta t}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (\text{C.10})$$

Pour obtenir $\frac{\partial \dot{\lambda} \Delta t}{\partial \underline{\varepsilon}}$, on utilise la fonction de charge écrite sous la forme $\sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}^e\| - 3GJ^{-1} \dot{\lambda} \Delta t - \sigma_0 = 0$. La différentiation de cette relation donne :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial \|\underline{s}^e\|}{\partial \underline{\varepsilon}} - 3GJ^{-1} \frac{\partial \dot{\lambda} \Delta t}{\partial \underline{\varepsilon}} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial \underline{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{C.11})$$

Or :

$$\frac{\partial \|\underline{s}^e\|}{\partial \underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \|\underline{s}^e\|}{\partial \underline{s}^e} : \frac{\partial \underline{s}^e}{\partial \underline{\varepsilon}} = 2GJ^{-1} \left(\underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) : \frac{\underline{s}^e}{\|\underline{s}^e\|} \quad (\text{C.12})$$

Soit :

$$\frac{\partial \|\underline{s}^e\|}{\partial \underline{\varepsilon}} = 2GJ^{-1} \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \quad (\text{C.13})$$

On en déduit, avec (C.11) :

$$\frac{\partial \dot{\lambda} \Delta t}{\partial \underline{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2GJ^{-1}}{3GJ^{-1} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \quad (\text{C.14})$$

Et par conséquent :

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \underline{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2GJ^{-1} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}^p}}{3GJ^{-1} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \quad (\text{C.15})$$

En combinant (C.9), (C.15), (C.4) dans (C.3) puis dans (C.2), on aboutit finalement, après quelques arrangements, à :

$$\partial \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}^{ep} : \partial \underline{\varepsilon} \quad (\text{C.16})$$

avec pour l'opérateur tangent cohérent :

$$\underline{\underline{C}}^{ep} = J^{-1} \left(K \underline{1} \otimes \underline{1} + 2G \beta \left[\underline{I} - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1} \right] - 2G \varpi \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \otimes \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \right) \quad (\text{C.17})$$

Avec :

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_0}{\|\underline{s}^e\|} \quad (\text{C.18})$$

$$\varpi = \beta - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3GJ^{-1}} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \quad (\text{C.19})$$

Annexe D

Calculs utiles pour l'intégration numérique du modèle de Gurson

Dans cette annexe, les expressions des différentes grandeurs intervenant dans l'algorithme d'intégration numérique du modèle de Gurson sont explicitées.

D.1 Dérivées partielles de Φ

L'intégration du modèle de Gurson nécessite le calcul des dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction Φ . La fonction de charge Φ est prise sous la forme :

$$\Phi = \sigma^2 - \sigma_M^2 \phi = 0 \quad (\text{D.1})$$

Avec :

$$\phi = (1 + q_3 f^2) - 2q_1 f \cosh(x) \quad (\text{D.2})$$

et

$$x = \frac{3}{2} \frac{q_2 \sigma_m}{\sigma_M} \quad (\text{D.3})$$

On obtient alors les relations suivantes :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} = 2\sigma_{eq} \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} = 3\alpha \sigma_M \quad (\text{D.5})$$

avec :

$$\alpha = q_1 q_2 f \sinh(x) \quad (\text{D.6})$$

De plus :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} = \sigma_M^2 (2q_1 \cosh(x) - 2q_3 f) \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p} = -h (2\sigma_M + 3\alpha\sigma_m) \quad (\text{D.8})$$

où $h = \frac{\partial \sigma_M}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}$ est la pente de la loi d'érouissage.

Enfin, pour les dérivées secondes de Φ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \sigma_{eq}} = 2 \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{eq} \partial \sigma_m} = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{eq} \partial \bar{\varepsilon}_M^p} = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{eq} \partial f} = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \sigma_m} = \frac{9}{2} q_1 q_2^2 f \cosh(x) \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \bar{\varepsilon}_M^p} = -\frac{9}{2} h q_1 q_2^2 f \frac{\sigma_m}{\sigma_M} \cosh(x) + 3\alpha h \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} = 3\sigma_M q_1 q_2 \sinh(x) \quad (\text{D.15})$$

D.2 Expression des coefficients a_{ij}

Nous détaillons ici les expressions des coefficients intervenant dans la section 4.5.7.

$$a_{11} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} + \Delta \varepsilon_{eq} \left\{ -K J^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \sigma_m} + A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \bar{\varepsilon}_M^p} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \right\} \quad (\text{D.16})$$

$$a_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + 3G J^{-1} \Delta \varepsilon_m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \sigma_{eq}} + \Delta \varepsilon_{eq} \left\{ C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \bar{\varepsilon}_M^p} + D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \right\} \quad (\text{D.17})$$

$$a_{21} = -K J^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + A \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p} + B \frac{\partial \Phi}{\partial f} \quad (\text{D.18})$$

$$a_{22} = -3G J^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} + C \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p} + D \frac{\partial \Phi}{\partial f} \quad (\text{D.19})$$

Avec :

$$A = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \Delta \varepsilon_m} = \frac{\sigma_m}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{D.20})$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_m} = (1-f) + \mathcal{A} \frac{\sigma_m}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{D.21})$$

$$C = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \Delta \varepsilon_{eq}} = \frac{\sigma_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{D.22})$$

$$D = \frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_{eq}} = \mathcal{A} \frac{\sigma_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{D.23})$$

D.3 Coefficients intervenant dans l'opérateur tangent cohérent

Les coefficients C_{ij} de la section 4.5.7 sont donnés par :

$$C_{11} = \frac{(A_{22} + 3GJ^{-1}B_{22})B_{11} - (A_{12} + 3GJ^{-1}B_{12})B_{21}}{\Delta} \quad (\text{D.24})$$

$$C_{12} = \frac{(A_{22} + 3GJ^{-1}B_{22})B_{12} - (A_{12} + 3GJ^{-1}B_{12})B_{22}}{\Delta} \quad (\text{D.25})$$

$$C_{21} = \frac{(A_{11} + 3KJ^{-1}B_{11})B_{21} - (A_{21} + 3KJ^{-1}B_{21})B_{11}}{\Delta} \quad (\text{D.26})$$

$$C_{22} = \frac{(A_{11} + 3KJ^{-1}B_{11})B_{22} - (A_{21} + 3KJ^{-1}B_{21})B_{12}}{\Delta} \quad (\text{D.27})$$

Avec :

$$\Delta = (A_{11} + 3KJ^{-1}B_{11})(A_{22} + 3GJ^{-1}B_{22}) - (A_{12} + 3GJ^{-1}B_{12})(A_{21} + 3KJ^{-1}B_{21}) \quad (\text{D.28})$$

Par ailleurs, les coefficients A_{ij} ont pour expression :

$$A_{11} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} + \Delta \varepsilon_{eq} \left\{ A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \bar{\varepsilon}_M^p} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \right\} \quad (\text{D.29})$$

$$A_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \Delta \varepsilon_{eq} \left\{ C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \bar{\varepsilon}_M^p} + D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \right\} \quad (\text{D.30})$$

$$A_{21} = A \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p} + B \frac{\partial \Phi}{\partial f} \quad (\text{D.31})$$

$$A_{22} = C \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p} + D \frac{\partial \Phi}{\partial f} \quad (\text{D.32})$$

Où A , B , C et D sont les coefficients introduits précédemment.

Les coefficients B_{ij} sont donnés par :

$$B_{11} = \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{3} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \sigma_m} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \bar{\varepsilon}_M^p} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \right] \quad (\text{D.33})$$

$$B_{12} = \frac{\Delta \varepsilon_m}{3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \sigma_{eq}} + \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{3} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \sigma_{eq}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial \bar{\varepsilon}_M^p} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_{eq}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}} \right] \quad (\text{D.34})$$

$$B_{21} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \right) \quad (\text{D.35})$$

$$B_{22} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_M^p} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}} \right) \quad (\text{D.36})$$

Avec :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_{eq}} = \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{(1-f)\sigma_M} \quad \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_m} = \frac{\Delta \varepsilon_m}{(1-f)\sigma_M} \quad (\text{D.37})$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}} = \mathcal{A} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_{eq}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = \mathcal{A} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_M^p}{\partial \sigma_m} \quad (\text{D.38})$$

Annexe E

Formulation semi-analytique du modèle de Gurson

E.1 Objectif

Pour pouvoir tester la bonne implantation numérique du modèle de Gurson, nous proposons de comparer les résultats obtenus sur un essai de traction avec une solution semi-analytique. Celle-ci est basée sur celle proposée par Chambert (2001) pour des taux de triaxialité constants.

On considère le problème comme étant piloté en déformation. Par la suite, le but est d'exprimer les lois d'évolutions des contraintes et des variables internes en fonction des déformations, pour pouvoir ensuite intégrer un système d'équations différentielles.

E.2 Mise en équations

Dans un essai de traction axisymétrique, le tenseur des contraintes se réduit à une seule composante σ telle que $\sigma = \sigma_{eq}$. Par suite, le taux de triaxialité est égal à $\frac{1}{3}$, et donc $\sigma_m = \frac{\sigma_{eq}}{3}$.

Les lois d'évolution sont données en fonction du multiplicateur $\dot{\lambda}$. Pour le calculer, il s'agit de satisfaire la condition de cohérence $\dot{\Phi} = 0$. Donc :

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \dot{\sigma}_{eq} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \dot{\sigma}_m + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_M} \dot{\sigma}_M + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \dot{f} \quad (\text{E.1})$$

Les lois d'évolution sont données par :

$$\dot{f} = \dot{\lambda}(1 - f) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \mathcal{A} \dot{\tilde{\epsilon}}_M^p \quad (\text{E.2})$$

et

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_M^p = \dot{\lambda} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \sigma_{eq} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \sigma_m}{(1 - f) \sigma_M} \quad (\text{E.3})$$

Soit, en utilisant le fait que $\sigma_m = \frac{\sigma_{eq}}{3}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{W}{H} \dot{\sigma}_{eq} \quad (\text{E.4})$$

Avec :

$$W = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} + \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right) \quad (\text{E.5})$$

$$H = (1 - f) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \Phi}{\partial f} + \frac{\sigma_{eq}}{(1 - f) \sigma_M} W \left(h \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_M} + \mathcal{A} \frac{\partial \Phi}{\partial f} \right) \quad (\text{E.6})$$

Où $h = \frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p}$ est la pente de la loi d'érouissage.

Enfin, $\dot{\varepsilon}_{eq}$ est tel que $\dot{\varepsilon}_{eq} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}}$. D'où :

$$\dot{\sigma}_{eq} = \left(\frac{W}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \right)^{-1} \dot{\varepsilon}_{eq} \quad (\text{E.7})$$

On aboutit donc au système d'équations différentielles à résoudre, en fonction de $\dot{\varepsilon}_{eq}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{eq} = \frac{H}{W} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \right)^{-1} \dot{\varepsilon}_{eq} \\ \dot{f} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \right)^{-1} \left[(1 - f) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \mathcal{A} \frac{W \sigma_{eq}}{(1 - f) \sigma_M} \right] \dot{\varepsilon}_{eq} \\ \dot{\varepsilon}_M^p = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \right)^{-1} \frac{W \sigma_{eq}}{(1 - f) \sigma_M} \dot{\varepsilon}_{eq} \end{array} \right. \quad (\text{E.8})$$

E.3 Résolution

Ce système est résolu en utilisant un schéma d'Euler. Aravas (1987) indique qu'il est nécessaire d'utiliser un pas d'intégration petit pour obtenir une bonne précision. L'incrément de déformation choisi est tel que $\Delta \varepsilon_{eq} = \frac{1}{1000}$. La résolution est effectuée à l'aide du logiciel Matlab.

Annexe F

Présentation du dispositif d'enregistrement vidéo du découpage dans l'épaisseur de la tôle

F.1 Introduction

L'enregistrement vidéo du découpage dans l'épaisseur de la tôle présente plusieurs intérêts. Tout d'abord, il permet de visualiser *in situ* la déformation de la tôle pendant le découpage. Ensuite, si la qualité des images enregistrées le permet, il est possible de détecter l'instant d'amorçage d'une fissure, ce qui évite de le déterminer après l'essai par analyse du profil de rupture. Enfin, en utilisant une technique d'analyse d'images, on peut avoir accès au champ de déformations dans l'épaisseur de la tôle, au moins dans les premiers instants de pénétration du poinçon.

F.2 Description du dispositif

Une ouverture est réalisée sur la matrice, permettant ainsi de filmer le découpage en temps réel, voir chapitre 6. On trouve dans la littérature plusieurs exemples de tels enregistrements sur des opérations de découpage (Stegeman *et al.*, 1999; Aoki et Takahashi, 2003). Cependant, à notre connaissance, aucune ne concerne du découpage de tôles minces, c'est-à-dire d'épaisseur inférieure à 0.5 mm.

Le problème qui se pose pour de telles dimensions est la nécessité d'un zoom optique suffisamment puissant, les zooms macros ne sont plus suffisants. L'emploi de microscope standard est également proscrit, dans la mesure où il est impossible, pour des raisons évidentes d'encombrement, de venir affleurer l'échantillon au cours de l'essai. Les possibilités offertes par un microscope longue distance sont intéressantes, mais leur coût reste très élevé. La solution retenue est donc une solution intermédiaire entre les zooms habituels et les optiques microscopiques. Une caméra CCD standard est couplée à un zoom optique autorisant des grossissements tels que la résolution de la zone enregistrée soit de l'ordre de 1 μm par pixel. Le système optique et l'outil de découpage sont représentés sur la photographie Fig. F.1.

Sur cette figure, on peut remarquer que la caméra est positionnée sur un trepied. Ce système de positionnement est choisi afin de désolidariser la caméra de l'outil. En effet,

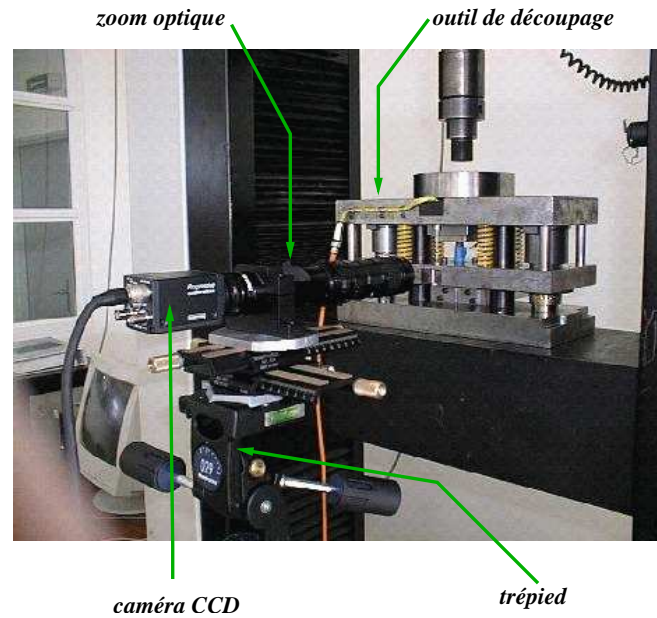


FIG. F.1 – Vue d'ensemble de l'outil de découpage et du système d'acquisition vidéo.

dans le cas contraire, les vibrations produites lors du découpage se répercuteraient au système vidéo, et rendraient l'image floue.

Simultanément à l'acquisition vidéo, la courbe effort déplacement du poinçon est enregistrée. Les signaux sont synchronisés de telle sorte que le début de l'acquisition soit simultané. Cette opération est réalisée via une baie d'acquisition disposant d'une sortie analogique reliée à la caméra. Les caméras standards possèdent en effet une possibilité de déclenchement par trigger, c'est-à-dire lorsque le bit d'entrée change d'état binaire. Le pilotage de ce déclenchement est assuré par le déplacement du poinçon de la façon suivante. Le poinçon est au départ en retrait dans le serre flan. Lorsque le poinçon est descendu par rapport au serre flan d'une valeur prédéterminée, l'enregistrement est déclenché. Du fait du léger décalage dû au temps de transmission des signaux, l'enregistrement est débuté avant le début effectif du découpage.

F.3 Exemple d'acquisition

Quelques images enregistrées lors du découpage d'une tôle en alliage cuivreux d'épaisseur 0.25 mm sont présentées sur la Fig. F.2. Pour obtenir un bon état de surface dans l'épaisseur, la tôle est préalablement polie. Les niveaux de pénétration du poinçon sont indiqués en pourcentage de l'épaisseur de la tôle. La courbe effort-déplacement correspondante est tracée sur la Fig. F.3.

A 12 % (image b), le comportement est élasto-plastique. On peut noter sur cette image la réorientation de la matière dans la zone déformée due à la pénétration du poinçon. Pour cet alliage cuivreux, la chute de l'effort intervient assez rapidement, pour une pénétration d'environ 18 %. A 28 % (image c), aucune fissure n'est encore amorcée. On observe la formation de la zone cisailée. Pour une pénétration de 72 %, la tôle est totalement découpée. L'amorçage d'une fissure macroscopique intervient pour une pénétration d'environ 40 % et la rupture complète de la tôle est obtenue pour une pénétration de 45 % environ.

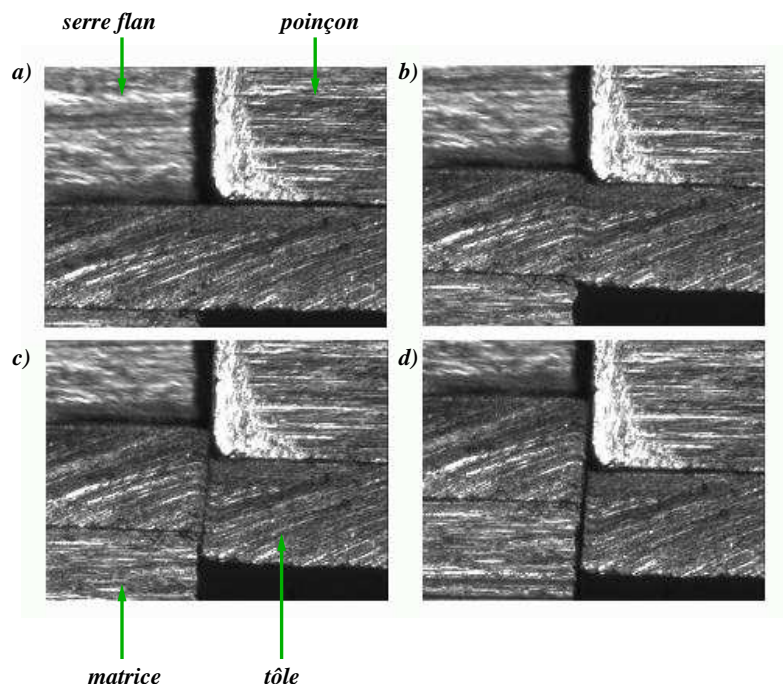


FIG. F.2 – Images enregistrées lors du découpage d'une tôle en alliage cuivreux d'épaisseur 0.25 mm ; a) Pénétration du poinçon 0 % ; b) Pénétration 12 % ; c) Pénétration 28 % ; d) Pénétration 72 %.

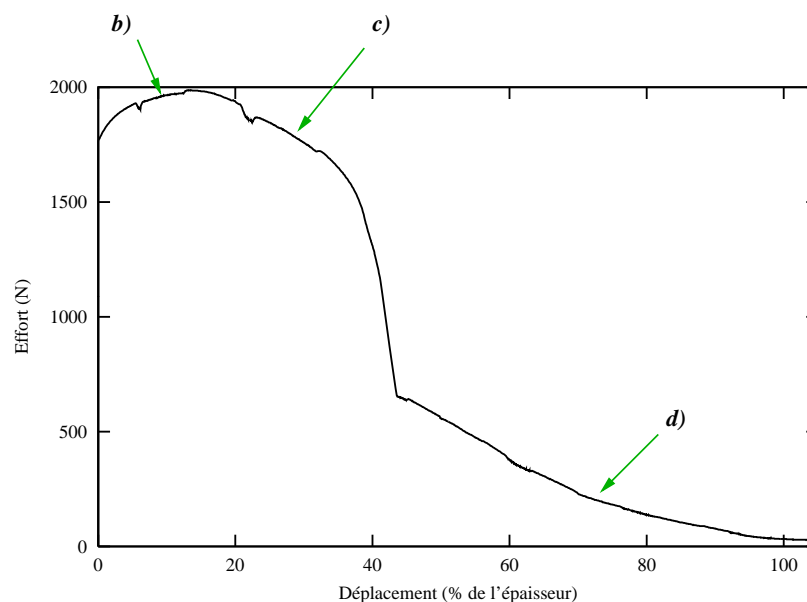


FIG. F.3 – Courbe effort-déplacement du poinçon enregistrée lors du découpage d'une tôle en alliage cuivreux d'épaisseur 0.25 mm. Les lettres correspondent aux images de la figure précédente.

Il s'avère difficile de détecter sur les images l'amorçage d'une fissure. En effet, les déformations subies par la tôle entraînent une réorientation de la matière dans la zone déformée. Cette réorientation s'accompagne de variations de luminosité importantes dans la zone cisailée. Sur les images de la Fig. F.2, la zone déformée devient rapidement trop sombre pour permettre une mesure fiable. A l'inverse, on peut obtenir une saturation de lumière dans cette zone, Fig. F.4. Ce problème n'a pu être éliminé jusqu'à présent.

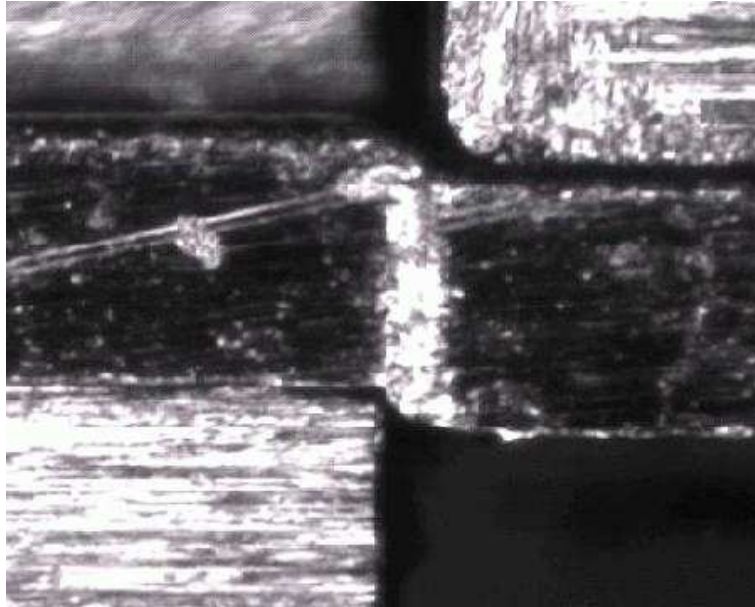
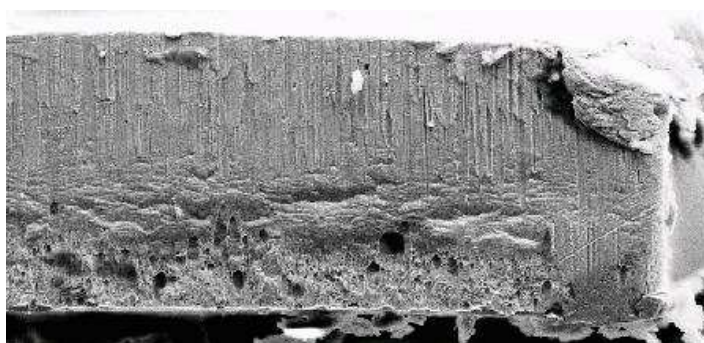


FIG. F.4 – Exemple de saturation de lumière dans la zone déformée.

Le second problème rencontré est l'influence des conditions de bords libres dues à l'ouverture de la matrice. La déformation de la tôle est sensiblement différente entre le bord de celle-ci (à l'endroit où l'on visualise la déformation) et le reste du contour. Ceci est illustré par la Fig. F.5, sur laquelle on constate que l'aspect du profil de rupture diffère sur le bord de la tôle.



← **Visualisation
caméra CCD**

FIG. F.5 – Profil de la découpe pour un alliage cuivreux d'épaisseur 0.2 mm (Grossissement x510).

Ce problème est également rencontré par Stegeman *et al.* (1999). Ils obtiennent un écart important entre les déformations mesurées par analyse d'images et celles obtenues par la simulation numérique. Nous avons également entrepris ce type de comparaison, en utilisant une méthode de mesure des champs de déformation par intercorrélation d'images.

Les confrontations avec la simulation numérique ne sont pas concluantes, et ne sont donc pas présentées dans ce mémoire.

F.4 Conclusion

Le dispositif d'enregistrement vidéo mis en place permet de visualiser la déformation de la tôle au cours du découpage. Malgré la faible épaisseur des tôles découpées, on obtient une bonne résolution. Toutefois, deux problèmes n'ont pu être résolus jusqu'à présent. Il s'agit d'une part des fortes variations de luminosité au cours de la déformation. D'autre part, le bord libre dû à l'ouverture de la matrice modifie considérablement la déformation de la tôle.

RÉSUMÉ

Le découpage mécanique des métaux est un procédé très utilisé dans l'industrie. Il permet notamment de réaliser des composants de formes plus ou moins complexes dédiés à l'industrie électronique. Cependant, il nécessite le réglage et le contrôle de nombreux paramètres. Or, le contexte industriel actuel rend les méthodes fondées sur le savoir-faire des opérateurs inadaptées. L'objet principal de cette thèse est donc de proposer un outil d'aide à la mise au point d'un découpage par le biais de la simulation numérique. La modélisation repose sur une analyse mécanique complète du comportement matériel de la tôle. La sensibilité du matériau à la vitesse de déformation et à la température est prise en compte par l'intermédiaire d'un modèle thermo-élasto-viscoplastique dans un cadre adiabatique. Les mécanismes d'endommagement et de rupture sont également pris en compte dans la modélisation. Un logiciel de simulation spécifiquement dédié au découpage a été développé. Il est basé sur la méthode des éléments finis et repose sur une modélisation bi-dimensionnelle du procédé. En parallèle aux développements numériques, un dispositif expérimental a été conçu et réalisé au cours de ces travaux, afin de valider les modèles mécaniques retenus. Les applications présentées dans ce mémoire illustrent l'apport de la simulation numérique pour les entreprises spécialisées.

MOTS CLÉS

découpage, simulation numérique, méthode des éléments finis, remaillage, endommagement, rupture.

ABSTRACT

Blanking is a widely used metal forming process in industry. Indeed, components dedicated to electronic applications are often manufactured with blanking. However, there are many parameters to adjust and control in such an operation. Nowadays, empirical methods and know-how of the operators are no longer sufficient. The aim of this thesis is thus to propose a numerical tool to help manufacturers in this task. Modeling is based on a full mechanical analysis of the material behaviour of the sheet metal part. Strain rates and thermal sensitivities of the material are taken into account by means of a thermo-elasto-viscoplastic model in an adiabatic context. Damage and fracture are also incorporated into the modeling. A simulation software dedicated to blanking has been developed, based on the finite element method where blanking is simulated with a two-dimensional model. Moreover, an experimental device has been designed and manufactured during this study in order to validate the mechanical models. Some practical applications are also presented in this document to illustrate how numerical simulation can be helpful for designers and manufacturers.

KEY WORDS

blanking, numerical simulation, finite element method, remeshing, damage, fracture.